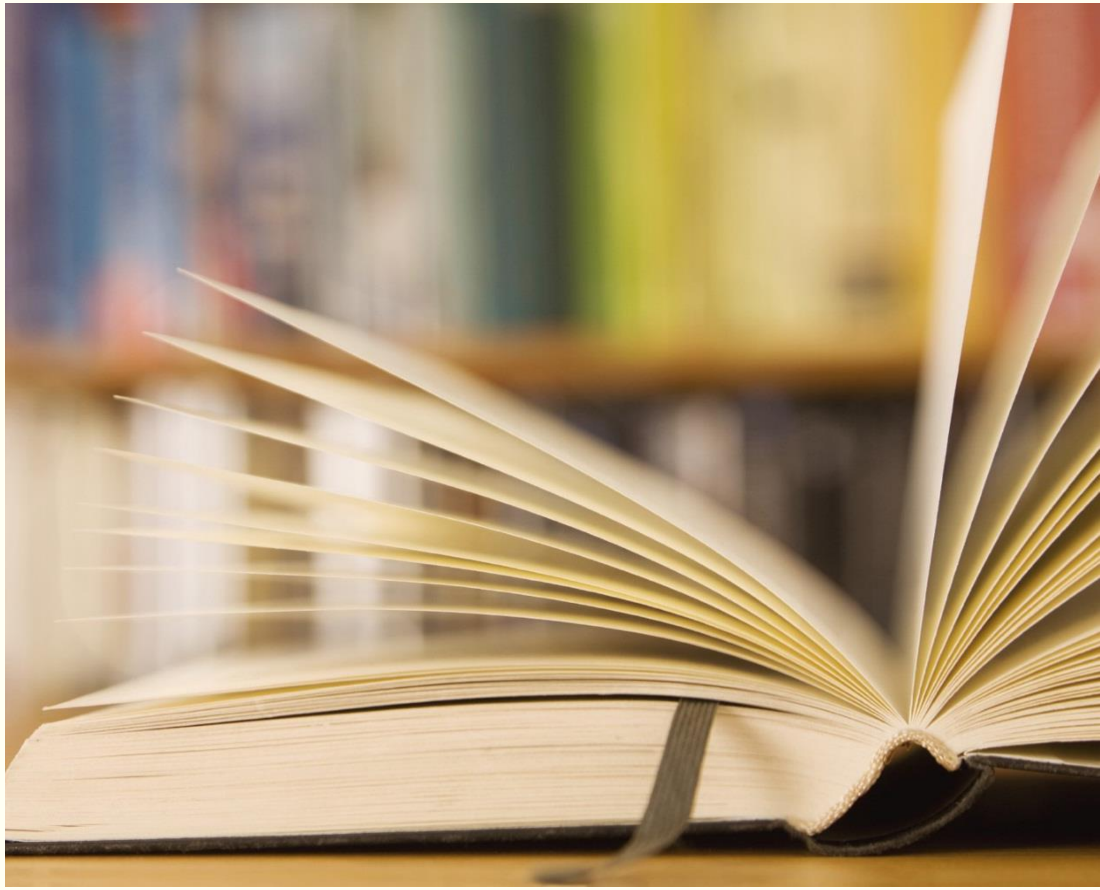
LE LANGAGE DU CALCUL PROPOSITIONNEL



Contenu du chapitre 1

- Introduction
- Proposition
- Le langage du calcul propositionnel
- La syntaxe du langage propositionnel
- La sémantique du langage propositionnel
- Priorité des connecteurs
- Satisfiabilité
- Tautologie
- Conséquence Logique
- Système complet de connecteurs
- Forme Normale
- Méthode de résolution

Introduction

Le calcul des propositions ou calcul propositionnel est une théorie logique ayant pour objet l'étude des relations logiques entre «propositions» et définissant les lois formelles selon lesquelles, au moyen de connecteurs logiques, les propositions se coordonnent et s'enchaînent pour produire des raisonnements valides.

Proposition

On appelle proposition un assemblage de mots d'une langue naturelle vérifiant les trois propriétés suivantes :

1. Il est reconnu syntaxiquement correct ;
2. Il est sémantiquement correct ;
3. Il est possible de lui assigner sans ambiguïté une valeur de vérité (vrai ou faux).

Exemples

1. Aymen est un nombre pair; La propriété 2 n'est pas vérifiée. Ce n'est donc pas une proposition.
2. Aymen est un étudiant; Les propriétées 1,2 et 3 sont vérifiées. C'est ne proposition.
3. Le facteur est il arrivé? Ce n'est pas une propostion car on ne peut pas lui affecter une valeur de vérité.

Le langage du calcul propositionnel

Le langage propositionnel est composé de formules représentant des propositions.

Comme les autres langages, le langage du calcul propositionnel est caractérisé par sa syntaxe et sa sémantique.

La syntaxe du langage propositionnel

La syntaxe d’un langage définit l’alphabet et les règles d’écriture (grammaire) des expressions du langage. Elle ne s’intéresse pas à leurs sens.

La syntaxe du langage propositionnel

L'alphabet

L'alphabet est composé des symboles du langage. Il comporte :

- Un ensemble dénombrable de variables propositionnelles. On convient d'utiliser les lettres de l'alphabet latin (a, b, c ...) éventuellement indicées.
- Des connecteurs logiques $(\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow)$
- Des symboles auxiliaires.

Les règles d'écritures

Les règles d'écriture précisent la manière dont sont assemblés les symboles de l'alphabet pour former des expressions bien formées (ou formules) du langage propositionnel:

1. Toute variable propositionnelle est une formule ;
2. Si α est une formule, $\neg\alpha$ (ou $\overline{\alpha}$) est une formule ;
3. Si α et β sont des formules, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \Rightarrow \beta)$ et $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ sont des formules ;
4. Une expression n'est une formule que si elle est écrite conformément aux règles 1,2 et 3.

Exemples

P, Q sont des variables propositionnelles;

P→Q: c'est une formule

P ¬ Q: ce n'est pas une proposition (la négation ¬ est un connecteur unaire)

Priorité des connecteurs

Les connecteurs sont appliqués dans l'ordre suivant :

$$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$$

Exemples:

$\neg p \wedge q$ se lit $(\neg p) \wedge q$.

$p \wedge q \Rightarrow r$ se lit $(p \wedge q) \Rightarrow r$.

$p \vee q \wedge r$ se lit $p \vee (q \wedge r)$.

$p \vee q \vee r$ se lit $(p \vee q) \vee r$

La sémantique d'un langage propositionnel

L'étude sémantique d'un langage pour le calcul des propositions a pour but de donner une valeur de vérité (vraie ou faux) aux formules du langage.

Les valeurs de vérité d'une formule F a n variables propositionnelles est donné par une table de vérité de 2^n lignes

La négation

A chaque proposition P, on peut lui associer sa négation. La négation d'une proposition a est notée ¬ a ou $\overline{a}$

- Si la proposition a est vraie alors a est fausse.
- Si la proposition a est fausse alors a est vraie.

a	$\overline{a}$
1	0
0	1

Exemple:

a:2^3 = 8

¬ a: $2^3 \neq 8$

La conjonction

La conjonction de deux propositions a et b notée symboliquement par a ∧ b et se lit (a et b) est vraie si et seulement si les deux propositions a et b sont vraies simultanément. D'où la table de vérité suivante :

a	b	$a \wedge b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

La disjonction

La disjonction de deux propositions a et b notée symboliquement par a V b et se lit (a ou b) est fausse si et seulement si les deux propositions a et b sont fausses simultanément. D'où la table de vérité suivante :

a	b	$a \vee b$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

L'implication

Le connecteur "$\Longrightarrow$" est appelé le connecteur d'implication, la proposition

a $\Longrightarrow$ b est fausse dans le cas où a est vraie et b est fausse. Elle est définie par le tableau suivant :

a	b	$a \Rightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

L’équivalence

Le connecteur "⇔" est appelé le connecteur d’équivalence, la proposition a , b est vraie dans le cas où a et b ont la même valeur de vérité. Elle est définie par le tableau suivant :

a	b	$a \Leftrightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Satisfiabilité

Une formule α est dite satisfiable si et seulement si sa table de vérité contient au moins une ligne où la valeur de vérité de est vraie (ou $V(\alpha) = 1$).

α est dite insatisfiable si elle est fausse sur toutes les lignes de sa table de vérité.

Exemple:

Soit β la formule $(p \wedge q) \wedge \overline{(p \Leftrightarrow q)}$,

p	q	$p \wedge q$	$\overline{(p \Leftrightarrow q)}$	β
1	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	0	1	0
0	0	0	0	0

D'où β est insatisfiable (contradiction ou antilogie).

Satisfiabilité d'un ensemble de formules

On généralise la notion de satisfiabilité à un ensemble de formules :

Soit $\Gamma = \{\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3, \ldots \alpha n\}$un ensemble de formules. Γ est dit satisfiable si et seulement si étant donné la table de vérité de toutes les formules $\alpha 1$, $\alpha 2$, $\alpha 3, \ldots \alpha n$, il existe au moins une lignes où toutes ces formules sont vraies simultanément.

La satisfiabilité d'un ensemble de formules est assimilée à la conjonction de toutes ses formules.

Exemples:

1. L'ensemble $\{p \wedge q, p \vee q, p \Rightarrow q\}$ est satisfiable.

2. L'ensemble $\{p \wedge q, p \vee q, \overline{p}\}$ est insatisfiable.

Tautologie

Une formule α est une tautologie (on note $\vDash \alpha$), si et seulement si α est vraie sur toutes les lignes de sa table de vérité.

Exemple

la formule $a \wedge b \Rightarrow b$ est une tautologie.

a	b	$a \wedge b$	$a \wedge b \Rightarrow b$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Conséquence Logique

En langage propositionnel, une formule β est conséquence logique d'une formule

α(et on note $\alpha \vDash \beta$), si et seulement si étant donné la table de vérité de α et β, la valeur de vérité de β est vraie sur toutes les lignes où la valeur de vérité de α est vraie.

De manière générale, une formule β est conséquence logique d'un ensemble de formules $\Gamma = \{\alpha 1, \alpha\ 2, \ldots, \alpha\ n\}$(et on note $\Gamma \vDash \beta$ ou encore $\alpha 1, \alpha\ 2, \ldots, \alpha\ n \vDash \beta$ si et seulement si étant donné la table de vérité des formules $\alpha 1, \alpha\ 2, \ldots, \alpha\ n$, la valeur de vérité de β est vraie sur toutes les lignes où les formules $\alpha 1, \alpha\ 2, \ldots, \alpha\ n$ sont vraie simultanément.

Conséquence Logique

Exemple

$$p \Rightarrow q, q \models p$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$\overline{p}$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

Remarque: {a1,a2,a3…an} ⊨ a SSI ⊨a1∧a2∧a3∧…an ⟹ a

Système complet de connecteurs

Un ensemble Γ de connecteurs est dit complet, si étant donné une formule quelconque α du calcul propositionnel, on peut trouver une formule β dans laquelle n'interviennent que les éléments de Γ et telle que :

$$\alpha \equiv \beta$$

L'ensemble $\{\neg, \vee\}$ est complet.

Forme Normale

Un atome ou formule atomique est une formule ne comportant qu'une variable propositionnelle (pas de connecteurs).

– Un littéral est une formule atomique ou la négation d'une formule atomique.

– Un monôme conjonctif est une conjonction de littéraux.

– Une clause est une disjonction de littéraux.

– Une formule est en forme normale conjonctive si elle est une conjonction de clauses.

– Une formule est en forme normale disjonctive si elle est une disjonction de monômes.

Obtention de Forme Normale Disjonctive (FND)

Soit α une formule du calcul propositionnel ayant n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Supposons que A est la table de vérité de α. La FND de α est obtenue de la manière suivante :

- Soit p le nombre de lignes de A telles que $V(\alpha) = 1$.
- Pour chaque ligne i, $i = 1, \ldots, p$ où $V(\alpha) = 1$, soit M_i le monôme conjonctif correspondant.

$$M_i = \bigwedge_{k=1}^{n} a_{ik}, \quad \text{avec } a_{ik} = \begin{cases} x_k, \text{ si } V(x_k) = 1; \\ \overline{x_k}, \text{ si } V(x) = 0. \end{cases}$$

- La FND de α est alors :

$$\alpha \equiv \bigvee_{i=1}^{p} M_i.$$

Obtention de Forme Normale Conjonctive (FNC)

D'une manière analogue, on obtient la FNC d'une formule α. Soit α une formule du calcul propositionnel ayant n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Supposons que A est la table de vérité de α. La FNC de α est obtenue de la manière suivante :

– Soit q le nombre de lignes de A, telles que $V(\alpha) = 0$.

– Pour chaque ligne $i,\ i = 1, \ldots, q$ où $V(\alpha) = 0$, soit C_i la clause correspondante.

$$C_i = \bigvee_{k=1}^{n} l_{ik}, \quad \text{avec } l_{ik} = \begin{cases} x_k, & \text{si } V(x_k) = 0; \\ \overline{x_k}, & \text{si } V(x) = 1. \end{cases}$$

– La FNC de α est alors :

$$\alpha \equiv \bigwedge_{i=1}^{p} M_i.$$

MÉTHODE DE RÉSOLUTION POUR LE CALCUL PROPOSITIONNEL

Introduction

Nous nous sommes intéressés au cours de l'étude sémantique du calcul propositionnel, à la satisfiabilité des formules ou à montrer qu'une formule est une tautologie ou bien encore qu'elle est conséquence logique d'un ensemble de formules. Si la table de vérité s'est montré incontournable, il reste que son usage peut s'avérer laborieux.

La méthode de résolution nous offre les moyens de vérifier la validité d'une formule et de déduire des formules à partir d'autres formules sans nous intéresser aux valeurs de vérité;

Principe de la méthode de résolution

Le principe de résolution est comme suit:

Pour montrer qu'une formule α est valide, nous cherchons à montrer que sa négation $\neg\ \alpha$ est non satisfiable (contradiction) et pour montrer qu'une formule β est conséquence logique d'un ensemble de formules Γ, nous cherchons à montrer que l'ensemble $\Gamma\ \cup$ $\{\neg\ B\}$est non satisfiable.

La résolution impose toutefois de travailler sur des formules sous forme clausale.

Définitions

Littéral

Un Littéral est une variable propositionnelle ou la négation de la variable propositionnelle

Exemple:

P ; ¬ P; ¬ Q sont des littéraux

Clause

On appelle clause, une formule du calcul propositionnel de la forme:

$C = C_1 \lor C_2 \lor \ldots \lor C_n$ avec C_i $(i=1,\ldots,n)$ est littéral

Exemple:

$C_1 = (\neg p \lor q)$, $C_2 = (p \lor \neg q \lor r)$ sont des clauses

Définitions

Clause Vide

Une clause C ne contenant aucun littéral est appelée clause vide on la note :

C≡ □

Littéraux complémentaires

Deux littéraux L1 et L2 sont dits complémentaires lorsque l'un est la négation de l'autre

Exemple:

P et ¬ P sont complémentaires

Résolvant

Soient C1 et C2 deux clauses contenant respectivement les littéraux complémentaires L et $\neg$ L

On appelle **résolvant de C1 et C2**, la clause C obtenue en supprimant L du C1 et $\neg$ L de C2 et en formant le ou logique des clauses restantes

Exemple 1: Soient C1=$\neg$ p V q , C2 = p V r, C= q V r

Exemple 2: C1= p Vq Vr , C2= p Vs

Il existe aucun littéral dans C1 qui soit le complémentaire d'un autre littéral dans C2, donc il existe pas de résolvant entre C1 et C2

Remarque:

Si C1= L et C2= $\neg$ l Alors le résolvant C entre C1 et C2 est C = □

Théorème

Soit deux clauses C1 et C2, un résolvant C de C1 et C2 est une conséquence logique de C1 et C2.

Démonstration: exercice

Déduction d'une clause C

Soit S un ensemble de clauses, la déduction (résolution) de la clause C à partir de S est une séquence finie de clauses C_1, C_2, …C_n oû C_i (i=1,…,n) est un élément de de S ou un résolvant de C_k et C_j avec $1 \leq j \leq i$ et $1 \leq k \leq i$ et $C_n = C$

Une déduction de la clause C à partir de S est appelée réfutation ou preuve de S

Exemple 1

Considérons l'ensemble S de clauses suivants

1. ¬ p Vq
2. ¬ q
3. P

----

4. ¬ p résolvant de 1 et 2
5. □ résolvant de 3 et 4

Exemple 1 (Suite)

On remarque dans l'exemple 1, la clause vide dérive par résolution à partir de S. Donc d'après le théorème précédent la clause vide est une conséquence logique de S.

Comme la clause vide ne peut être conséquence logique que d'un ensemble contradictoire donc S est contradictoire.

Exemple 2

Soit à démontrer $\{(p \vee q \vee r), (\neg p \vee q \vee r), (\neg q \vee r)\} \vDash r$

Ceci revient à montrer que l'ensemble S suivant est contradictoire

1. C1: $(p \vee q \vee r)$
2. C2: $(\neg p \vee q \vee r)$
3. C3: $(\neg q \vee r)$
4. C4: $\neg r$

----

5. C5: $(q \vee r)$ résolvant de C1 et C2

6. C6: r résolvant de C3 et C5

7. C7: $\square$ résolvant de C4 et C6

Exemple 3

$F \equiv (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$

Montrer que F est une tautologie revient à montrer que $\neg F$ est une contradiction

$\neg F \equiv (B \vee \neg A) \wedge (B \vee A) \wedge \neg B$

Ce qui revient à montrer que l'ensemble S de clauses suivant est contradictoire

$C1 \equiv (B \vee \neg A)$

$C2 \equiv (B \vee A)$

$C3 \equiv \neg B$

\------------------------

$C4 \equiv B$ résolvant de C1 et C2

$C5 \equiv \square$ résolvant de C3 et C4

S est contradictoire donc F est une tautologie