Université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou
Faculté de Génie Electrique et Informatique
Département d'Informatique

Année universitaire : 2013/2014
2ième année Licence – Informatique
Module : Logique Mathématique

Examen

(Durée 1h 30mn)

Exercice 1 : (*4 pts*)

Si **V(F)** désigne la valeur de vérité de la fbf F de la logique des propositions, à l'aide de **min** et **max**, exprimez **V(F)** dans chacun des cas suivants :

a) $F = \neg A$; b) $F = (A \wedge B)$; c) $F = (A \vee B)$; d) $F = (A \rightarrow B)$; e) $F = (A \leftrightarrow B)$.

On considère les formules $\boldsymbol{\varphi = p \wedge (\neg q \rightarrow (q \rightarrow p))}$ et $\boldsymbol{\psi = (p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)}$.

En utilisant la question précédente, déterminez $V(\varphi)$ et $V(\psi)$, sachant que $V(p) = 0$ et $V(q) = 1$.

Exercice 2 : (*5 pts*) On considère les énoncés suivants:

1. Si Brahim rate son examen alors il sera déprimé.
2. S'il fait beau alors Brahim ira à la piscine.
3. A la piscine, Brahim ne travaille pas.
4. Si Brahim ne va pas à la piscine alors il sera déprimé.
5. Brahim ratera son examen s'il ne travaille pas.

Question 1 : Formalisez le problème en logique propositionnelle, avec : R : « Brahim rate son examen », B : « Il fait beau », P : « Brahim ira à la piscine »,T : « Brahim travaille », D : « Brahim déprime ».

Question 2 : Montrez que Brahim sera déprimé.

Exercice 3 : (05 pts). Soit l'ensemble de connecteurs $E = \{ \rightarrow, \perp \}$ où $\perp$ représente la constante « faux ».

1. Montrez que E est un ensemble complet de connecteurs.
2. Montrez que $G = \{ \rightarrow \}$ n'est pas complet. Pour cela, vous prouverez qu'il n'existe pas de formule F, formée à l'aide de variables et du connecteur « $\rightarrow$ » seulement, équivalente à $\perp$. Raisonnez par récurrence sur le nombre d'occurrences de $\rightarrow$ dans F.

Exercice 4 : (06 pts).

1. Montrer, en utilisant le théorème de déduction, que la formule F1 suivante est un théorème.

$$F1 \equiv ((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow C)))$$

2. Montrer, maintenant, que la formule F2 suivante est un théorème ; et cela sans utiliser d'hypothèse.

$$F2 \equiv ((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

3. Soit $SFLP^+$ l'extension du SFLP obtenue an ajoutant la formule suivante (*) comme quatrième axiome :

(*) $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$

À l'aide de la méthode axiomatique, montrer que $SFLP^+$ est incohérent (inconsistant).

Bon courage !

Corrigé de l'examen de Logique mathématique 2013/2014

Ex. 1 : a) $V(\neg A) = 1 - V(A)$; b) $V(A \wedge B) = \min(V(A), V(B))$; c) $V(A \vee B) = \max(V(A), V(B))$;
d) $V(A \to B) = V(\neg A \vee B) = \max(1 - V(A), V(B))$; e) $V(A \leftrightarrow B) = V((A \to B) \wedge (B \to A))$
$= \min((\max(1 - V(A), V(B)), (\max(1 - V(B), V(A))$.

$$\boldsymbol{\varphi = p \wedge (\neg q \to (q \to p))} \Rightarrow V(\varphi) = \min(V(p), V(\neg q \to (q \to p))$$
$$= \min(V(p), V(q \vee (q \to p)))$$
$$= \min(V(p), \max(V(q), V(\neg q), V(p)))$$
$$= \min(V(p), \max(V(q), 1 - V(q), V(p)))$$
$$= \min(V(p), 1) = V(p) = 0, \text{ donc } \underline{\boldsymbol{V(\varphi) = 0}}$$

$$\boldsymbol{\psi = (p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)} \Leftrightarrow V(\psi) = 1 \text{ ssi } V(p \vee q) = V(\neg p \vee \neg q)$$
$$\text{ssi } \max(V(p), V(q)) = \max(1 - V(p), 1 - V(q))$$
$$\text{ssi } V(p) \neq V(q) \text{ ce qui est le cas, donc } \underline{\boldsymbol{V(\psi) = 1.}}$$

Ex. 2 : Question 1. Formalisation :

1. $R \to D$
2. $B \to P$
3. $P \to \neg T$
4. $\neg P \to D$
5. $\neg T \to R$.

Question 2. Montrer que Brahim sera déprimé, revient à montrer que la forme d'argument suivante est valide: $1, 2, 3, 4, 5 \models D \Leftrightarrow \models (1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4 \wedge 5) \to D$. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que $\varphi = ((1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4 \wedge 5) \to D)$ n'est pas une tautologie $\Leftrightarrow$ φ possède au moins un contre modèle I $\Leftrightarrow$ I satisfait $(1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4 \wedge 5)$ et ne satisfait pas D. $\Leftrightarrow$ I satisfait $((\neg R \vee D) \wedge (\neg B \vee P) \wedge (\neg P \vee \neg T) \wedge (P \vee D) \wedge (T \vee R))$ et ne satisfait pas D. $\Leftrightarrow$ I satisfait $\neg R$ et T et $\neg P$ et P $\Leftrightarrow$ contradiction . D'où φ est tautologie, c'est à dire <u>Brahim sera déprimé.</u>

Ex3 : 1. Pour montrer que E est un ensemble complet de connecteurs, il suffit d'exprimer chacun des connecteurs : $\neg, \wedge, \vee, \leftrightarrow$ en fonction des éléments de E.

$\neg a = a \to \perp$; $a \wedge b = \neg\neg(a \wedge b) = \neg(\neg a \vee \neg b) = \neg(a \to \neg b) = (a \to (b \to \perp)) \to \perp$.

$(a \vee b) = (\neg\neg a \vee b) = (\neg a \to b) = (a \to \perp) \to b$.

$(a \leftrightarrow b) = (a \to b) \wedge (b \to a) = ((a \to b) \to ((b \to a) \to \perp)) \to \perp$. D'où E est complet.

2. Pour montrer que G n'est pas complet, montrons qu'aucune formule construite à l'aide du seul connecteur $\to$ n'est équivalente à $\perp$. On le vérifie en prouvant par récurrence que la propriété P(n) suivante est vraie pour tout $n \geq 0$.

   P(n) : » toute formule écrite avec n connecteurs $\to$ n'est pas équivalente à $\perp$.

   - Base de récurrence : n = 0, une formule sans connecteur est de la forme $\varphi = p$ qui n »est pas équivalente à $\perp$. Donc P(0) est vraie.
   - Hypothèse de récurrence : supposons P(m) vraie pour tout $0 \leq m \leq n$. Soit φ une formule contenant n + 1 connecteurs $\to$. Alors φ est de la forme $\varphi = \varphi_1 \to \varphi_2$ où φ_1 et φ_2 comportent au plus n connecteurs $\to$. Par hypothèse de récurrence, φ_1 et φ_2 ne sont pas équivalentes à $\perp$. Il existe donc une interprétation I telle que $I(\varphi_2) = 1$. Par conséquent $I(\varphi) = 1$ et φ n'est pas à $\perp$. D'où P(n) est vraie pour tout $n \in N$.

Ex. 4 : 1) Montrons que $F1 \equiv ((A \to B) \to (B \to C)) \to (A \to ((A \to B) \to C)))$ est un théorème en utilisant le théorème de déduction.

1. $(A \to B) \to (B \to C)$ Hypothèse.
2. A Hypothèse.
3. $A \to B$ Hypothèse.
4. B MP (2, 3).
5. $B \to C$ MP (1, 3).
6. C MP (4, 5).

D'où $\{((A \to B) \to (B \to C)),\ A, (A \to B)\} \mid\!- C \iff$
$\mid\!- ((A \to B) \to (B \to C)) \to (A \to ((A \to B) \to C)))$ par l'application trois fois successives du théorème de déduction.

2) Montrons que $F2 \equiv ((A \to B) \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ est un théorème en utilisant une démonstration pure.

1. $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ thm 2, exo 11, série 2
2. $((A \to B) \to (B \to C)) \to (B \to (B \to C))$ thm f2, exo 14, série 2
3. $(B \to (B \to C)) \to (B \to C)$ thm f1, exo 14, série 2
4. $((A \to B) \to (B \to C)) \to (B \to C)$ Trans (2,3).
5. $((A \to B) \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ Trans (1, 4).

3) Pour montrer que $SFLP^+$ est incohérent, il suffit de supposer que $\neg A$ est un théorème, et montrer que A est aussi un théorème de $SFLP^+$. En effet,

1. $\neg A$ Théorème.
2. $(A \to \neg A) \to (\neg A \to A)$ Axiome (*)
3. $\neg A \to (A \to \neg A)$ Axiome 1.
4. $\neg A \to (\neg A \to A)$ Trans (3, 2).
5. $(\neg A \to A)$ MP(1, 4).
6. $\neg A \to (A \to \neg(A \to A))$ Thm e) Exo 12 Série 2.
7. $(\neg A \to (A \to \neg(A \to A))) \to ((\neg A \to A) \to (\neg A \to \neg(A \to A)))$ Axiome 2.
8. $((\neg A \to A) \to (\neg A \to \neg(A \to A)))$ MP (6,7).
9. $(\neg A \to \neg(A \to A))$ MP (5, 8).
10. $(\neg A \to \neg(A \to A)) \to ((A \to A) \to A)$ Axiome 3.
11. $((A \to A) \to A)$ MP (9, 10).
12. $(A \to A)$ Théorème montré en cours.
13. A MP (11, 12).

D'où dans le $SFLP^+$ A et $\neg A$ sont simultanément des théorèmes, d'où son incohérence.