Université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou
Faculté de génie électrique et informatique
Département d'informatique

Année universitaire : 2013/2014
L2 – Informatique
module : Logique Mathématique

Examen de Rattrapage

Durée 1h 30mn

Exercice **1** : (***6 pts***)

1) Montrer que l'ensemble $\{\rightarrow\}$ n'est pas un système complet de connecteurs (pour ce faire, monter qu'il existe une fonction logique qui ne peut pas s'exprimer en utilisant uniquement $\rightarrow$).

2)

2-1) l'ensemble $\{\vee, \rightarrow\}$ est-il complet ?

2-2) qu'en est-il de l'ensemble $\{\neg, \rightarrow\}$, est ce qu'il est complet ?

Exercice **2** : (***6 pts***)

1) Montrer que les formules suivantes sont des théorèmes :

1-a) $\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

1-b) $(C \rightarrow ((A \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow B)) \rightarrow (C \rightarrow (\neg A \rightarrow B))$

2) Soit CPF^+ l'extension du CPF obtenue an ajoutant la formule suivante (*) comme quatrième axiome :

(*) $\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$

À l'aide de la méthode axiomatique, montrer que CPF^+ est inconsistant (pour cela, montrer que toute formule A est un théorème de CPF^+).

Exercice **3** : (***8 pts***)

On considère les prémisses suivantes :

(E1) Si Amar et Brahim viennent à Alger, Chabane viendra aussi ;

(E2) Si Brahim vient à Alger, Amar aussi ;

(E3) Brahim ou Chabane, l'un des deux au moins, viendra à Alger.

Les questions aux quelles on veut répondre sont, à partir de ces prémisses, peut-on déduire que :

(A)- Amar viendra à Alger ?

(B)- Brahim viendra à Alger ?

(C)- Chabane viendra à Alger ?

1) Formaliser les prémisses et les questions à l'aide de formules du calcul propositionnel.

2) Répondre aux questions en utilisant des tables de vérité.

3) Répondre aux questions en utilisant la résolution propositionnelle.

--- **Bon courage !** ----------

Bref corrigé : (Rattrapage – Log-Mat – L2 informatique – 2013/2014)

Ex. **1** :

1) Soit la fonction $f(x)=0$ (x : variable booléenne, f : fonction logique constante égale à 0).

Soit $E_n(x)$ une expression logique comportant n connecteurs $\rightarrow$.

Montrons par récurrence sur n qu'il n'existe aucun n pour lequel $f(x)=E_n(x)$.

Pour $n=1$, $E_1(x) = x \rightarrow x = 1 \neq 0$. f ne peut pas s'exprimer à l'aide de E_1.

Pour $n=2$, $E_2(x) = 1$ (c'est $x \rightarrow (x \rightarrow x)$) ou $E_2(x)=x$ (c'est $(x \rightarrow x) \rightarrow x$) ;

et f ne peut pas s'exprimer à l'aide de E_2.

Supposons que la propriété est vraie jusqu'au rang $n=k$.

Pour $n = k+1$: on peut avoir $E_{k+1}(x) = E_i(x) \rightarrow E_j(x)$ avec $i+j=k$ (donc $i\leq k$ et $j\leq k$).

Pour avoir $E_{k+1}=0$ il est nécessaire que E_j soit nulle pour tout x (à cause de l'implication) ;

or d'après l'hypothèse de récurrence aucune E_j ne peut être nulle. D'où le résultat.

2)

2-1) L'ensemble $\{\vee, \rightarrow\}$ n'est pas complet. Il suffit de remarquer que $A \vee B = (A \rightarrow B) \rightarrow B$.

Donc $\{\vee, \rightarrow\}$ a le même pouvoir d'expression que $\{\rightarrow\}$.

2-2) L'ensemble $\{\neg, \rightarrow\}$ est complet, exprimons les autres connecteurs en fonction des éléments de cet ensemble :

$A \vee B = \neg A \rightarrow B$

$A \wedge B = \neg (A \rightarrow \neg B)$

$A \leftrightarrow B = \neg ((A \rightarrow B) \rightarrow \neg(B \rightarrow A))$

Ex. **2** :

1)

1-a) $\vdash \neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

1. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$ thm c) exo 12 série 2
2. $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg B)) \rightarrow (\neg (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg\neg A)$ thm e) exo 12 série 2
3. $\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg\neg A$ MP + 1. + 2.
4. $\neg\neg A \rightarrow A$ thm a) exo 12 série 2
5. $\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow A$ Trans + 3. + 4.
6. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ Ax1
7. $\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ Trans + 5. + 6.

CQFD.

1-b) $\vdash$ $(C \to ((A \to (C \to B)) \to B)) \to (C \to (\neg A \to B))$

1. $C \to ((A \to (C \to B)) \to B)$ hyp
2. C hyp
3. $(A \to (C \to B)) \to B$ MP + 1. + 2.
4. $\neg A \to (A \to (C \to B))$ thm c) exo 12 série 2
5. $\neg A \to B$ Trans + 3. + 4.

   CQFD.

2) $\vdash$ A (pour tout A), dans CPF^+

1. $(\neg A \to (\neg A \to A)) \to (\neg A \to A)$ thm f1, exo 14, série 2
2. $\neg A \to (\neg A \to A)$ thm (*)
3. $\neg A \to A$ MP + 1. + 2.
4. $(\neg A \to A) \to ((\neg\neg A \to A) \to A)$ thm g, exo 12, série 2
5. $(\neg\neg A \to A) \to A$ MP + 3. + 4.
6. $\neg\neg A \to A$ thm a, exo 12, série 2
7. A   MP + 7. + 8.

   CQFD.

<u>Ex. **3** :</u>

1) Formalisation à l'aide de formules du calcul propositionnel :

E1 = $(A \wedge B) \to C$

E2 = $B \to A$

E3 = $B \vee C$

Soit E = E1 $\wedge$ E2 $\wedge$ E3 ; les trois questions peuvent s'exprimer comme suit :

Q1 = $E \to A$

Q2 = $E \to B$

Q3 = $E \to C$

2)

A	B	C	$A \wedge B$	E1	E2	E3	E	Q1	Q2	Q3
0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Ce que l’on peut déduire c’est que Chabane viendra à Alger ; mais il n’en est pas de même pour Amar et Brahim.

3) En utilisant la résolution par réfutation :

Pour Q1 :

1. $\neg A \vee \neg B \vee C$
2. $\neg B \vee A$
3. $B \vee C$
4. $\neg A$
5. $A \vee C$ Res(2,3)
6. $\neg B$ Res(2,4)
7. $\neg B \vee C$ Res(1,2)
8. C Res(3,7)

…

On remarque que l’on ne peut pas obtenir de littéral A (mais pour que la preuve soit complète, il faut montrer que quelque soit l’application de règles de résolution effectuées, on n’obtient pas A).

Pour Q2 :

Idem que pour Q1 (avec B au lieu de A).

Pour Q3 :

1. $\neg A \vee \neg B \vee C$
2. $\neg B \vee A$
3. $B \vee C$
4. $\neg C$
5. $\neg B \vee C$ Res(1,2)
6. C Res(3,5)
7. $\square$ Res(4,6)

CQFD.