CHAPITRE 2

LE LANGAGE DU CALCUL DE PRÉDICATS DU PREMIER ORDRE

Introduction

Le calcul propositionnel reste très limité, et ne permet essentiellement que d'exprimer des opérations booléennes sur des propositions. Si l'on veut pouvoir raisonner sur des assertions mathématiques, il nous faut autoriser des constructions plus riches.

Ainsi la formule $\forall x \in N; x \leq x^2$ représente toutes les formules $0 \leq 0$, $1 \leq 1$, $2 \leq 4$,

$3 \leq 9$,. . .

Introduction

Un tel énoncé n'est pas capturé par la logique propositionnelle. Tout d'abord par ce qu'il utilise des prédicats comme $x \in N$ dont la valeur de vérité dépend d'une variable x, ce qui n'est pas possible en logique propositionnelle. Par ailleurs, on utilise ici des quantificateurs comme $\forall, \exists$ qui ne sont pas présents en logique propositionnelle.

L'énoncé précédent est un exemple de formule du calcul des prédicats du premier ordre.

Introduction

Le calcul des prédicats est considéré comme une extension du calcul propositionnel qui offre la possibilité d'introduire en même temps que les variables propositionnelles d'autres variables appartenant à un domaine arbitraire (ensemble d'entiers, de réels ou d'objets quelconques). Cette extension est obtenue grâce à l'introduction des deux quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

I. LE LANGAGE DU CALCUL DES PRÉDICATS DU PREMIER ORDRE

Le langage du calcul des prédicats du premier ordre

L'alphabet

Il est formé :

- Des connecteurs logiques $\neg$, $\wedge$,$\vee$,$\Longrightarrow$,$\Longleftrightarrow$;
- Des quantificateurs : $\forall$,$\exists$;
- D'un ensemble dénombrable de symboles de variables : x; y; z; ….;
- D'un ensemble dénombrable éventuellement vide de symboles de constantes : a; b; e; … ;
- D'un ensemble dénombrable éventuellement vide de symboles de fonctions : f0; f1; …;
- D'un ensemble dénombrable de symboles de prédicats : P1; P2; Q; … ;
- Des symboles auxiliaires : (;).

Le langage du calcul des prédicats du premier ordre

Les termes

1. Toute constante est un terme ;
2. Toute variable est un terme ;
3. Si f est un symbole de fonction à n arguments et t_1, t_2,…, t_n sont des termes, alors $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ est un terme ;
4. Rien d’autres n’est un terme, s’il n’est pas obtenu en vertus des règles 1, 2 et 3.

Exemple: x, a, f(a,g(x)), g(h(x,y))

Le langage du calcul des prédicats du premier ordre

Un Prédicat

Soit D un domaine, un prédicat est une fonction définie de D^n dans l'ensemble des valeurs de vérité {0,1}

Exemple:

père: $\{\text{ensemble des humains}\}^2 \longrightarrow \{0,1\}$

Ou père (x,y) signifie x est le père de y

Le langage du calcul des prédicats du premier ordre

Les formules

1. Une variable propositionnelle est une formule ;
2. Si t_1, t_2, ….,t_n sont des termes et P un prédicat à n variables, alors $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ est une formule ;
3. Si α et β sont des formules, alors : $\neg\, \alpha$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \Longrightarrow \beta$, $\alpha \Longleftrightarrow \beta$ sont aussi des formules ;
4. Si α est une formule et x une variable, alors $\forall\, x\, \alpha$ et $\exists x\, \alpha$ sont des formules ;
5. Rien n'est une formule, s'il n'est pas obtenu en vertus des règles 1, 2,3 et 4.

Le langage du calcul des prédicats du premier ordre

Exemple de formules

$A \equiv \forall\, x\, (\exists\, y\, P(x,y) \Longrightarrow \forall\, z\, Q(x,z))$

$B \equiv \exists\, z \forall\, x\, ((R(x,v) \Longrightarrow (P(u) \vee \exists\, t\, Q(z,t)))$

$$F \equiv \forall x A(x) \to (\forall y((P(f(x),0) \to (P(g(y),b)))$$

$$G \equiv (P(f(a),b)) \to \forall x\,((\neg P(x,0)) \wedge P(f(x),g(x,f(x))))$$

Le langage du calcul des prédicats du premier ordre

Priorité des connecteurs

Les connecteurs et les quantificateurs sont appliqués dans l'ordre suivant :

$$\neg, \wedge, \vee, \forall, \exists, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow$$

Le langage du calcul des prédicats du premier ordre

Exemple

$$\forall x \; P(x) \lor \exists y Q(y) \land P(x)$$

se lit

$$\forall x \; (P(x) \lor \exists y \; (Q(y) \land P(x)))$$

Le langage du calcul des prédicats du premier ordre

Champs d'un quantificateur

Le Champ d'un quantificateur est la partie de la formule couverte par un quantificateur.

Exemple:

$$
\begin{array}{ll}
\forall x\ \underline{\alpha \wedge \beta} & \exists x\ \underline{\alpha \wedge \beta} \\
\forall x\ \underline{\alpha \vee \beta} & \exists x\ \underline{\alpha \vee \beta} \\
\forall x\ \underline{\alpha} \Rightarrow \beta & \exists x\ \underline{\alpha} \Rightarrow \beta \\
\forall x\ (\underline{\alpha \Rightarrow \beta}) & \exists x\ (\underline{\alpha \Rightarrow \beta})
\end{array}
$$

Le langage du calcul des prédicats du premier ordre

Occurrence libre et Occurrence liée

Dans la formule ∀ x A la formule A est dite champ du quantificateur ∀ . La variable x est dite variable quantifiée par le quantificateur universel ∀. Les positions occupées par la variable x dans la formule A sont appelées occurrences de x. Dans la formule précédente F la variable x possède deux occurrences.

Une occurrence d'une variable x dans une formule est dite liée si elle possède une occurrence dans le champ d'un quantificateur ∀ (ou ∃) dans cette formule. Si une occurrence d'une variable n'est pas liée, elle est libre.

Le langage du calcul des prédicats du premier ordre

Exemples d’occurrence libre et d’occurrence liée

$$F \equiv \forall x A(\underline{x}) \to \big(\forall y((P(f(\underline{\underline{x}}),0) \to (P(g(y),b))\big)$$

La première occurrence de la variable x est liée par le quantificateur ∀x, mais la deuxième occurrence de la variable x est libre.

$$\forall y P(x,y) \wedge Q(y) \Rightarrow \exists x Q(x) \Rightarrow R(z)$$

$$\forall y P(\underbrace{\underline{x}}_{\text{libre}}, \underbrace{\underline{y}}_{\text{liée}}) \wedge Q(\underbrace{\underline{y}}_{\text{liée}}) \Rightarrow \exists x Q(\underbrace{\underline{x}}_{\text{liée}}) \Rightarrow R(\underbrace{\underline{z}}_{\text{libre}})$$

Le langage du calcul des prédicats du premier ordre

Variable libre et Variable liée

Une variable x est libre dans une formule A s'il existe dans A une occurrence libre de x.

Une variable x est liée dans une formule A s'il existe dans A une occurrence liée de x.

Remarque: Une variable x peut être libre et liée en même temps

Le langage du calcul des prédicats du premier ordre

Formule Close (fermée)

Une formule est dite close (ou fermée), si et seulement si, ne possède pas de variables libres.

II. SÉMANTIQUE DE LA LOGIQUE DES PRÉDICATS DU PREMIER ORDRE

Interprétation

On attribue un "sens" (une valeur de vérité !) à chacune des formules en interprétant les différents symboles (fonctions, prédicats), les constantes et les variables.

Ainsi, pour une formule particulière, nous pouvons obtenir plusieurs interprétations dépendant du sens que l'on donnera aux symboles de cette formule. Considérons par exemple la formule

Interprétation

Soit une formule F tel que: $F \equiv \forall\ x\ \exists\ y,\ P(x\ ,\ y)$

Plaçons nous dans l'ensemble des entiers naturels (c.a.d $x,\ y\ \in\ N$) et interprétons $P(x,y)$ comme étant la relation $x \leq y$. Pour cette interprétation la formule devient $\forall x\ \exists y(x \leq\ y)$. Remarquons qu'il est aisé, dans ce cas, de voir si cette formule est une proposition vraie ou une proposition fausse.

Interprétation

Soit une formule F du calcul des prédicats telle que :

$\{P_1,\ldots, P_n\}$ sont les prédicats contenus dans F.

$\{F_1,\ldots, F_k\}$ sont les symboles de fonctions contenus dans F.

$\{a_1,\ldots, a_m\}$ sont les constantes contenues dans F.

Une interprétation I de F consiste en la donnée :

1. d'un ensemble non vide D_I appelé le domaine de l'interprétation I.
2. d'une assignation $d_j \in D_I$ à chaque constante aj .
3. d'une assignation d'une relation n-aire R_i à chaque prédicat n-aire P_i.
4. d'une assignation d'une fonction n-aire f_i à chaque symbole de fonction naire F_i.

Interprétation

Exemple:

Soit la formule $(\forall x)(\forall y)(\exists z)P(f(x\ ,\ y),\ z)$. Pour interpréter cette formule nous devons spécifier chacun des éléments du quadruplet caractérisant la définition d'une interprétation. Soit par exemple :

1. $D_I \equiv N$: l'ensemble des entiers naturels.
2. Assigner à la fonction f, la fonction $f : N \times N \rightarrow N$ définie par $f(x\ ,\ y) = x + y$,
3. Assigner au prédicat P, la relation suivante :

$R : N \times N \rightarrow N$ définie par $R(x\ ,\ y) =$ "$x = y$".

Valuation

Etant donné un langage L du premier ordre et une interprétation I de domaine D sur ce langage, une valuation est une fonction qui associe à chaque variable un élément de D.

Interprétation d'un terme

On désigne par $I(t)_v$ l'élément de D associé au terme t par l'interprétation I de domaine D et la valuation V sur ce domaine. Cet élément est défini comme suit :

- Si $t = c$, alors $I(t)_v = I(c)_v = I(c)$; (c est une constante) ;
- Si $t = x_i$, alors $I(t)_v = I(x_i)_v = V(x_i)$; ($x_i$ est une variable) ;
- Si $t = f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, alors $I(t)_v = I(f)(I(t_1)_v, I(t_2)_v, \ldots, I(t_n)_v)$, (f est un symbole de fonction et $t_1, t_2, \ldots, t_n$ des termes).

Interprétation d'une formule

Etant donné un langage L du premier ordre et une interprétation I de domaine D et une valuation V sur ce domaine. $I(\alpha)_v$ d'une formule du premier ordre est définie comme suit :

1. Si α est une formule atomique, alors :

$$I(\alpha)_v = I(P(t_1, t_2, \ldots, t_n))_v = I(P)(I(t_1)_v, I(t_2)_v, \ldots, I(t_n)_v);$$

2. Si $\alpha = \overline{\beta}$, alors :

$$I(\alpha)_v = I(\overline{\beta})_v = \overline{I(\beta)_v};$$

3. Si $\alpha = \beta_1 \star \beta_2$ avec $\star \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, alors :

$$I(\alpha)_v = I(\beta_1)_v \star I(\beta_2)_v.$$

Satisfiabilité d'une formule

Etant donnés un langage L et une interprétation I. Une valuation V satisfait une formule α , si et seulement si, après substitution de l'élément du domaine de I associé par V à chaque variable libre de α , on obtient une proposition vraie pour l'interprétation considérée. Et on note:

$$I \models \alpha_v .$$

Satisfiabilité d'une formule

Exemple

Soit la formule

$$\beta \equiv P\left(f(x,y),y\right).$$

On se donne l'interprétation I de domaine D = N, telle que I(P) = " > ", I(f) = " - ",
et la valuation V telle que V (x) = 4 et V (y) = 1 qui satisfait β pour I. Donc :

$$I \models \beta_v.$$

Alors que la valuation V' telle que V'(x) = 4 et V '(y) = 3, ne satisfait pas la formule β pour I.

$$I \not\models \beta_v.$$

Définition . Une formule α est satisfiable, si et seulement si, il existe une interprétation I pour laquelle il existe au moins une valuation qui satisfait α.

Modèle d'une formule

Définition Une formule est vraie pour une interprétation I et on note I ⊨ α , si et seulement si, toute valuation satisfait α pour l'interprétation I. Dans ce cas, I est appelée modèle de α . Autrement dit :

$$I \models \alpha \Leftrightarrow (\text{quel que soit } V,\ I \models \alpha_v).$$

Exemple
Soit α la formule

$$P\,(f(x,y),x)\,.$$

L'interprétation I de domaine $D = \mathbb{N}$, $I(P) = " > "$, $I(f) =$ "le est successeur de x" est un modèle de α. Donc $I \models \alpha$.

Modèle d'une formule

Définition Une formule α est fausse pour une interprétation I si et seulement si, aucune valuation de I ne satisfait α .

Exemple Soit α la formule:

$$P\left(f(x,y),x\right).$$

Et soit l'interprétation I de domaine $D = \mathbb{N}$, $I(P) = " < "$, $I(f) = " + "$. Aucune valuation de D ne satisfait α pour I. Donc α est fausse pour I.

Formule valide

Une formule α est valide et on note $\models \alpha$, si et seulement si, est vraie pour toutes les interprétations. Toute interprétation est modèle pour α . Autrement dit:

$$\models \alpha \Leftrightarrow (\text{quel que soit } I, \text{quel que soit } V, I \models \alpha_v).$$

Pour montrer qu'une formule α est valide, on procède généralement par l'absurde. On suppose l'existence d'une interprétation I et d'une valuation v, telles que $I \not\models \alpha_v$ et on arrive à une contradiction.

Formule valide

Exemple Montrons que $\models \overline{P(x)} \vee P(x)$.

Supposons le contraire, i.e. qu'il existe une interprétation I et une valuation V telles que

$I \not\models \left(\overline{P(x)} \vee P(x)\right)_v$

i.e $\exists I, \exists V \ / I \models \overline{\left(\overline{P(x)} \vee P(x)\right)}_v$;

$\exists I, \exists V \ / I \models \left(P(x) \wedge \overline{P(x)}\right)_v$;

$\exists I, \exists V \ / I \models (P(x))_v$ et $I \models \left(\overline{P(x)}\right)_v$;

$\exists I, \exists V \ / I \models (P(x))_v$ et $I \not\models (P(x))_v$ d'où une contradiction.

Donc, on a bien $\models \overline{P(x)} \vee P(x)$.

Satisfiabilité d'un ensemble de formules

Un ensemble de formules $\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ est satisfiable, si et seulement si, il existe une interprétation I et une valuation V , telles que

$$I \models (\alpha_1)_v, I \models (\alpha_2)_v, \ldots, I \ (\alpha_n)_v.$$

Satisfiabilité d'un ensemble de formules

Exemple

$$\Gamma = \{P(x,y), M(x,y), E(x,y)\}.$$

Soit I l'interprétation de domaine $D = \{1,2,6\}$, telles que $I(P) =$ ".est diviseur de.", $I(M) =$ ". est multiple de." et $I(E) =$ ".est égal à.". Pour la valuation $V(x) = V(y) = 1$ l'ensemble Γ est satisfiable.

Modèle d'un ensemble de formules et conséquence logique

Une interprétation I est un modèle d'un ensemble de formules Γ, si et seulement si, I est un modèle de chacune des formules de Γ.

Une formule β est une conséquence logique d'un ensemble de formules Γ (et on note $(\Gamma \models \beta)$), si et seulement si, pour toute interprétation, toute valuation qui satisfait chacune des formule de Γ, satisfait aussi β. Tout modèle de Γ est aussi un modèle de β.