Université Paris 8	**Introduction à la logique**	**2016-2017**
Licence de mathématiques	**Exercices**	P. Guillot

1. Calcul propositionnel

Exercice 1.
On désigne par p la proposition simple « *Pierre aime Marie* » et par q la proposition simple « *Marie aime Pierre* ». Traduire les phrases suivantes en formules qui utilisent p, q et des connecteurs logiques :
1. Pierre et Marie s'aiment l'un l'autre.
2. Pierre et Marie ne s'aiment ni l'un ni l'autre.
3. Pierre aime Marie, mais Marie ne lui rend pas.
4. Il est faux que Marie aime Pierre et n'en soit pas aimée.
5. Pierre est aimé de Marie, mais il est faux que Pierre et Marie s'aiment mutuellement.
6. Marie n'est pas aimée de Pierre ou elle ne l'aime pas.
7. Il est faux que Pierre soit aimé de Marie et Marie de Pierre.
8. Il est faux que Marie aime Pierre ou qu'elle en soit aimée.

Exercice 2.
En désignant par p la proposition « *Pierre aime Marie* » et par q la proposition « *Marie aime Pierre* », donner une traduction en langue naturelle, aussi élégante que possible, des formules propositionnelles suivantes :
1. $(\neg p \wedge q)$
2. $\neg(p \wedge q)$
3. $(\neg p \vee q)$
4. $\neg(p \vee q)$
5. $(\neg p \Rightarrow q)$
6. $\neg(p \Rightarrow q)$
7. $(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg(p \wedge q)$

Exercice 3.
Traduire les phrases suivantes en formule propositionnelle en indiquant à quelles propositions simples correspondent les lettres utilisées.
1. Le monde n'a ni commencement, ni fin, ni cause.
2. Bien que 2 soit un nombre premier, c'est un nombre pair.
3. Selon que le mal peut ou non être vaincu, il faut le combattre ou s'y résigner.
4. À moins qu'il fasse beau, je prendrai mon parapluie.
5. Pour réussir, il suffit de travailler.
6. Pour réussir, il faut travailler.
7. Je mangerai des pommes sauf si elles ne sont pas mûres.

Exercice 4.
Dans les énoncés suivants, dire si le « *ou* » correspond à une disjonction ou à un « *ou exclusif* ».
1. Une porte est ouverte ou fermée
2. Les hommes sont bêtes ou méchants
3. L'entier a est inférieur ou égal à 5.
4. Tu te tais ou tu sors d'ici.
5. Il est interdit de fumer ou de boire en conduisant.
6. Tu as droit à une pomme ou à une banane.
7. La phrase de l'énoncé.

Exercice 5.
Les phrases suivantes sont sur le modèle « *si... alors* ». Traduire ces phrases en implication logique, en indiquant soigneusement à quelle proposition simple correspondent les lettres utilisées.

1. Si la loi est juste, alors elle est respectée.
2. Si la loi est rigoureuse, mais sans être injuste, les citoyens ont tort de s'en prendre à elle.
3. La loi n'est respectée que si elle est juste
4. Si la loi est rigoureuse, a à moins qu'elle soit injuste, elle est respectée.
5. Si le téléphone ne passe pas, il faut envoyer un pigeon voyageur.

Exercice 6.
Traduire les phrases suivantes en implication logique en précisant la signification des lettres utilisées :

1. Plus beau que moi, tu meurs.
2. Pour que π soit un nombre rationnel, il faut que son développement décimal soit limité ou périodique.
3. Pour que 21 soit divisible par 3, il suffit qu'il soit divisible par 9.
4. Pour que 9 soit un nombre premier, il ne suffit pas que ce soit un nombre impair.
5. Pour que le suspect soit innocent, il n'est pas nécessaire qu'il ait un alibi.
6. Tirez la poignée en cas de danger.
7. Ne tirez la poignée qu'en cas de danger.
8. Ventre affamé n'a pas d'oreille.
9. Il restera du vin sauf si Pierre vient à la soirée.

Exercice 7.
Exprimer ces formules en n'utilisant que la barre de SHEFFER :

1. $p \wedge q$,
2. $p \vee q$,
3. $p \Rightarrow q$.

Exercice 8.
Exprimer les connecteurs définis par les tables de vérité suivante à l'aide seulement des connecteurs $\neg$ et $\vee$.

p	q	$p \ominus q$	$p \odot q$	$p \oplus q$
v	v	v	f	f
v	f	v	v	v
f	v	f	f	v
f	f	v	f	f

Exercice 9.
Dresser la table de vérité de la formule $\neg\big(\neg p \wedge \neg q\big)$. Commenter.

Exercice 10.
On considère l'énoncé : « *Le suspect sera condamné, sauf si on arrête le vrai coupable* ». On pose p : « *Le suspect sera condamné* » et q :« *On arrête le vrai coupable* ». Déterminer si cet énoncé est vrai ou faux selon que les propositions p et q sont vraies ou fausses. En déduire une formule pour cet énoncé.

2. Formules

Exercice 1.
Représentez l'arbre syntaxique de ces formules, puis évaluez les lorsque $p = v$, $q = v$ et $r = f$.
1. $(\neg p \wedge \neg q)$.
2. $\big(p \Rightarrow (\neg p \vee r)\big)$.
3. $\big((p \vee q) \Rightarrow (q \Rightarrow \neg r)\big)$.
4. $\big((q \Leftrightarrow \neg p) \oplus \neg(p \wedge \neg r)\big)$.
5. $\Big((q \Rightarrow p) \Rightarrow \big((p \Leftrightarrow \neg r) \oplus \neg(\neg r \vee q)\big)\Big)$.
6. $\Big(\big(p \Rightarrow (q \oplus r)\big) \Leftrightarrow \neg\big(q \wedge \neg(p \vee r)\big)\Big)$.

Exercice 2.
Les formules suivantes sont écrites en notation polonaise préfixe. Écrire les arbres syntaxiques de ces formules et les exprimer en notation infixe usuelle.

1. $\Rightarrow p \Rightarrow p\, q$
2. $\Rightarrow \neg\neg p\, p$
3. $\Rightarrow p \neg\neg p$
4. $\Rightarrow p \Rightarrow q \vee q\, r$
5. $\wedge \vee \Rightarrow p\, q\, r\, s$
6. $\Leftrightarrow \Rightarrow \wedge q\, r \neg pp$
7. $\vee \Leftrightarrow s\, p \Rightarrow r \neg p$
8. $\Leftrightarrow \Rightarrow p \wedge p\, q \vee q \neg r$
9. $\Rightarrow p \Rightarrow q \Rightarrow \Rightarrow p \Rightarrow q\, r\, r$

Exercice 3.
Écrire les formules suivantes en notation polonaise préfixe :

1. $\big(\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg r\big)$
2. $\neg\big(\big(\neg p \Rightarrow (p \vee q)\big) \Rightarrow p\big)$
3. $\big(\big((p \Rightarrow q) \wedge r\big) \Rightarrow (p \vee q)\big)$
4. $\big((p \Rightarrow q) \wedge \big((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\big)\big)$
5. $\big((p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg(p \Rightarrow p)\big)$
6. $\big((\neg p \wedge q) \vee (p \Leftrightarrow q)\big)$
7. $\big(\neg(q \wedge \neg p) \Rightarrow \neg\big(r \wedge (\neg p \wedge \neg q)\big)\big)$
8. $\big((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg(p \Rightarrow q)\big)$

Exercice 4.
Compléter le tableau suivant :

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
v	v	v				
v	v	f				
v	f	v				
v	f	f				
f	v	v				
f	v	f				
f	f	v				
f	f	f				

Le connecteur $\Rightarrow$ est-il associatif ?

Exercice 5. Traduire les énoncés suivants en formule propositionnelle, déterminer leur valeur compte tenu de la valeur des propositions simples qui y figurent.
1. Si $2 < 3$ alors $1 = 0$.
2. Si $3 + 2 = 7$ alors $4 + 4 = 8$.
3. Il est faux que si $2 + 2 = 5$ alors $1 = 2$.
4. 12 est divisible par 2 ou par 4.
5. 12 est divisible par 2 ou par 5.
6. Si 18 est un nombre premier, alors 18 n'est pas divisible par 5.
7. Si 13 est un nombre pair, alors 26 est divisible par 4.
8. 110 est divisible par 10 si et seulement si il est divisible par 2 et par 5.

9. 18 est un nombre pair si et seulement si 18 est divisible par 2 et par 7.
10. Si 22 est un nombre premier, alors si $11 \neq 1$ et $11 \neq 22$, 11 n'est pas un diviseur de 22.

Exercice 6.

« *Qu'il pleuve ou non, je prends mon parapluie* »

1. Traduire cette phrase dans le langage des propositions en indiquant les propositions simples qui correspondent aux lettres utilisées.
2. Énoncer la négation de cette phrase, puis traduire cette négation.
3. Faire la table de vérité de ces deux énoncés. Commentez.

Exercice 7.

Dire si l'information dont on dispose est suffisante pour déterminer la valeur des formules suivantes. Dans le cas contraire, à quelle formule plus simple peut-on les réduire, ne faisant pas intervenir la variable propositionnelle ou la sous-formule dont on connaît la valeur ?

1. $\big((p \Rightarrow q) \Rightarrow r\big)$ avec $r = v$.
2. $\big((p \Rightarrow q) \Rightarrow r\big)$ avec $r = f$.
3. $\big(p \Rightarrow \big((q \Rightarrow r) \Rightarrow s\big)\big)$ avec $s = v$.
4. $\big(p \Rightarrow \big((q \Rightarrow r) \Rightarrow s\big)\big)$ avec $r = f$.
5. $\big(p \wedge (q \Rightarrow q)\big)$ avec $p = f$.
6. $\big(p \wedge (q \Rightarrow q)\big)$ avec $q = f$.
7. $\big(p \wedge (q \Rightarrow q)\big)$ avec $p = v$.
8. $\big(p \Leftrightarrow (q \wedge r)\big)$ avec $p = v$ et $r = v$.
9. $\big(p \wedge (p \vee q)$ avec $q = v$.
10. $\big(p \wedge (p \vee q)$ avec $q = v$.
11. $\big(p \wedge (p \vee q)$ avec $p = f$.
12. $\big(p \wedge (p \vee q)$ avec $p = v$.
13. $\big((p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)\big)$ avec $(p \wedge q) = v$.
14. $\Big[p \Rightarrow \Big(\big((p \Rightarrow q) \Rightarrow p\big) \Rightarrow q\Big)\Big]$ avec $p = v$.
15. $\neg\Big[\big((p \Rightarrow q) \Rightarrow p\big) \Rightarrow q\Big]$ avec $p = f$.
16. $\Big(p \Rightarrow \big((p \Rightarrow q) \Rightarrow p\big) \Rightarrow q\Big)$ avec $(p \wedge q) = v$.
17. $\big(p \vee (p \Rightarrow q)\big)$ avec $(p \Rightarrow q) = f$.
18. $\big(q \Rightarrow (p \Rightarrow q)\big)$ avec $(p \Rightarrow q) = f$.
19. $\big(q \oplus (p \Rightarrow q)\big)$ avec $(p \Rightarrow q) = f$.
20. $\big(p \Rightarrow (p \Rightarrow q)\big)$ avec $(p \Rightarrow q) = v$.
21. $\big(p \Rightarrow (p \Rightarrow q)\big)$ avec $p = v$.
22. $\big(p \Rightarrow (q \Rightarrow q)\big)$ avec $q = f$.
23. $\Big(\big((\neg p \vee r) \Rightarrow q\big) \Rightarrow (p \vee q)\Big)$ avec $\big((\neg p \vee r) = f\big)$

De 11 et 12 déduire une simplification de la formule $\big(p \wedge (p \vee q)\big)$.

3. Tautologies

Exercice 1.
En utilisant la méthode des tables de vérité, dire si les formules sont des tautologies :
1. $\neg(\neg p \Leftrightarrow p)$.
2. $\big((p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)\big)$.
3. $\big((p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)\big)$.
4. $\big((p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)\big)$.
5. $\big(\neg(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)\big)$.

Exercice 2.
Montrer par une méthode syntaxique, que les formules suivantes sont des tautologies :
1. $\big((p \wedge q) \Rightarrow p\big)$.
2. $\big((p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)\big)$.
3. $\big((p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)\big)$.
4. $\big((p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow r)\big)$.
5. Si une proposition implique sa propre négation, alors elle doit être réfutée : $(p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p$.

Exercice 3.
Marie dit :

« *Sauf si Pierre vient à la soirée, il restera de la bière ou du vin* ».

Pierre répond :

« *Si je ne viens pas à la soirée et qu'il ne reste plus de bière, alors il restera du vin.* ».

Traduire ce que disent ces deux personnes dans le langage des propositions, puis montrer, en utilisant une méthode syntaxique, qu'ils disent la même chose.

Exercice 4.
Vérifier que la formule suivante est une tautologie (axiome de Hilbert) :

$$\Big(\big(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\big) \Rightarrow \big((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\big)\Big)$$

Exercice 5.
On considère la formule suivante :

$$\big(p \vee (p \wedge q)\big)$$

1. Montrer à l'aide d'une table de vérité que cette formule a la même valeur que p.
2. Retrouver ce résultat à l'aide d'une méthode syntaxique
   Indication : remplacer la première occurrence de p par la formule $(p \wedge v)$.
3. Quelle tautologie peut-on en déduire ?
4. Comment la formule $\big(p \vee (p \wedge \neg q)\big)$ se simplifie-t-elle ?

Exercice 6.
Traduire les énoncés suivants en formule propositionnelle, puis montrer que chaque formule ainsi obtenue est une tautologie.

1. Si l'escargot est un mammifère, alors l'escargot est un mammifère ou un batracien.
2. S'il neige, alors s'il ne neige pas, il pleut.
3. Si la lune est une comète, alors, si elle est un satellite de la terre, elle est une comète.
4. Si le vautour est un ruminant, alors l'escargot est un carnivore ; ou l'escargot est un carnivore seulement si la baleine est un herbivore.
5. Si le chat mange la souris, alors la souris mange le chat ; ou si la souris mange le chat, alors le chat mange la souris.
6. S'il est faux que, si la terre tourne, Galilée avait raison, alors la terre tourne.
7. S'il est faux que, si la terre tourne, Galilée avait raison, alors Galilée avait tort.
8. S'il n'y a pas d'atmosphère sur Mars et s'il est vrai que, s'il n'y a pas d'atmosphère sur Mars, il n'y a pas de vie sur Mars, alors il n'y a pas de vie sur Mars.
9. Si 2 est un nombre premier, alors, si 2 est un nombre pair, 2 est un nombre premier et pair.
10. Si le juge est indulgent sans être faible, alors il est indulgent si, et seulement si il n'est pas faible.
11. Si le ciel est bleu, l'herbe est verte et la neige blanche, alors, si la neige n'est pas blanche, le ciel est bleu et l'herbe verte.

Exercice 7.
Trouver toutes les équivalences qui existent entre les formules de la liste suivante :

A : $(p \Rightarrow q)$,
B : $(p \Rightarrow \neg q)$,
C : $(\neg p \Rightarrow q)$,
D : $(\neg p \Rightarrow \neg q)$,
E : $(q \Rightarrow p)$,
F : $(q \Rightarrow \neg p)$,
G : $(\neg q \Rightarrow p)$,
H : $(\neg q \Rightarrow \neg p)$,

4. Inférences

Exercice 1.
Les inférences suivantes sont-elles valides ? pourquoi ?

1. $\neg p,\ q\ \vdash\ p \oplus q$
2. $\neg p,\ \neg q\ \vdash\ p \Rightarrow q$
3. $p \oplus q\ \vdash\ p \vee q$
4. $p,\ q\ \vdash\ p \Rightarrow q$

Exercice 2.
L'inférence suivante est-elle valide ?

À moins que les impôts ne soient augmentés, le budget de l'état sera en déficit.
Si le budget de l'état est en déficit, les prix des services publics seront relevés.
Par conséquent, si les impôts sont augmentés, les prix des services publics ne seront pas augmentés.

Exercice 3.
Déterminer si les ensembles de propositions suivants sont ou ne sont pas consistants. Pour ceux qui le sont, indiquer une distribution des valeurs de vérité des propositions qui donne la valeur vrai à toutes les propositions.

1. Si les appartements sont agréables, les occupants restent chez eux le dimanche.
   S'ils restent chez eux le dimanche, ils regardent la télévision ce jour là.
   S'ils regardent la télévision le dimanche, les appartements sont particulièrement bruyant ce jour là.
   S'ils sont trop bruyants le dimanche, les appartements ne sont pas agréables.
   Pourtant, les occupants restent quand-même chez eux le dimanche.
2. Les quatre premières propositions sont les mêmes que dans l'ensemble précédent, la cinquième est remplacée par « *Pourtant, les appartements sont agréables* ».

Commenter le résultat observé.

Exercice 4.
Brown, Jones et Smith, prévenus de fraude fiscale, prêtent serment de la façon suivante devant le juge d'instruction.

- Brown : « Jones *est coupable, mais* Smith *est innocent* ».
- Jones : « *Si* Brown *est coupable,* Smith *l'est également.*
- Smith : *Je suis innocent, mais l'un au moins des deux autres est coupable.*

1. Transcrire les témoignages des trois suspects dans le langage formel de la logique des propositions.
2. Les témoignages des trois suspects sont-ils compatibles ?
3. Le témoignage de l'un des suspects s'ensuit-il de celui d'un des autres suspects ? Si oui de quels témoignages s'agit-il ?
4. En supposant que le témoignage de chacun des suspects est vrai, qui est innocent et qui est coupable ?
5. Est-il raisonnable de soupçonner qui les trois suspects aient menti ?
6. Un seul témoignage n'est pas la conséquence des deux autres. Lequel ?

Exercice 5.
Soient P et Q deux formules propositionnelles. Démontrer que si P est une tautologie et si $P \Rightarrow Q$ alors Q est une tautologie.
Indication : démontrer par l'absurde en supposant qu'il existe une interprétation qui ne satisfait pas Q.

Exercice 6.
Vrai ou faux ? Justifier rapidement

1. La formule $F \vee G$ est une tautologie si et seulement si la formule F ou la formule G est une tautologie.
2. La formule $\neg(F \Leftrightarrow G)$ est une tautologie si et seulement si F est équivalente à $\neg G$.

Exercice 7.

1. Démontrer par une méthode syntaxique que les formules $(p \wedge q) \Rightarrow r$ et $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ sont équivalentes.
2. En déduire le théorème de la déduction de HERBRAND qui énonce que :

C découle de A et B si et seulement si l'implication $B \Rightarrow C$ découle de A.

Exercice 8.
Le raisonnement suivant est-il valide ?
Si nous ne soutenons pas les prix agricoles, les paysans ne voteront pas pour nous.
Si nous soutenons les prix agricoles, à moins que nous n'instituions un contrôle sévère de la production, la surproduction agricole continuera.
Sans les voix des paysans nous ne serons pas réélus.
Par conséquent, si nous sommes réélus sans avoir institué un contrôle sévère de la production, la surproduction agricole continuera.

5. Formes normales

Exercice 1.
On considère la formule donnée par la table suivante :

p	q	r	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Trouver une forme normale disjonctive en p, q et r dont c'est la table de vérité ($0 =$*faux* et $1 =$*vrai*), puis simplifier la formule trouvée.

Exercice 2.
Vérifier que la formule $(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r)$ est bien une forme normale disjonctive de $\neg\big(p \vee (q \wedge \neg r)\big)$.

Exercice 3.
Trouver une forme normale disjonctive pour chacune des formules suivantes :
1. $(p \vee q) \Rightarrow (r \Rightarrow \neg p)$
2. $p \Rightarrow q$
3. $p \Leftrightarrow q$
4. $p \Rightarrow (p \vee q)$
5. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
6. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$
7. $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$
8. $p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
9. $p \wedge \big(p \Rightarrow (q \Rightarrow p)\big)$

Exercice 4.
En interprétant « *faux* » avec la valeur 0, et la valeur « *vrai* » avec la valeur 1, trouver une formule qui interprète les opérateurs logiques suivants avec les opérations arithmétique d'addition, de soustraction et de multiplication :
1. $\neg a$
2. $a \wedge b$
3. $a \vee b$
4. $a \Rightarrow b$
5. $a \Leftrightarrow b$
6. $a \oplus b$

Vérifier qu'on a $a \Rightarrow b$ si et seulement si $a \leq b$.

Exercice 5.
Trouver une forme normale disjonctive des couples de formules ci-dessous et en déduire que ce sont des formules équivalentes :

1. $\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg r$	et	$\neg\big(\neg p \wedge \neg(r \Rightarrow q)\big)$
2. $\big((\neg p \wedge q) \vee (p \Leftrightarrow q)\big)$	et	$(p \Rightarrow q)$
3. $\neg\big((\neg p \Rightarrow (q \vee r)) \Rightarrow p\big)$	et	$\neg p \wedge (q \vee r)$
4. $\big((q \Rightarrow p) \wedge r\big) \Rightarrow (p \vee q)$	et	$\neg(q \wedge \neg p) \Rightarrow \neg\big(r \wedge (\neg p \wedge \neg q)\big)$
5. $q \wedge \big((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\big)$	et	$p \Rightarrow q$
6. $(p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg(p \Rightarrow p)$	et	$(q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg(p \Rightarrow q)$

Exercice 6.
Des parents s'inquiètent de ce que fera leur fils qui est étudiant, la veille de son examen : sortira-t-il ? révisera-t-il ? se couchera-t-il tôt ? et enfin aura-t-il une bonne note à son examen ? Ils savent que :

– s'il sort, il se couchera tard ;
– il révisera ou il sortira, ou même peut-être les deux ;
– s'il ne révise pas, il aura une mauvaise note ;
– s'il révise, il ne se couchera pas tôt.

1. Écrire ces conditions comme une formule.
2. Écrire une forme normale disjonctive de la conjonction de ces formules.
3 Grâce à ces quatre conditions, les parents connaissent la réponse à l'une de leur question. Laquelle ? et quelle est cette réponse ?
   Indication : Écrire les formules de chacun de ces énoncés, puis une forme normale disjonctive de la conjonction de ces énoncés. Observer chaque terme de cette forme normale disjonctive.
4. Ils apprennent par la suite que leur fils a eu une bonne note. Que peuvent-ils conclure pour les questions qui restent ?

Exercice 7.
Montrer que toute formule propositionnelle est équivalente à une formule dans laquelle n'apparaît que le connecteur $\neg$ et le connecteur $\Rightarrow$. On dit alors que $\{\neg, \Rightarrow\}$ est un *système complet de connecteurs.*

Exercice 8.
Dire dans chaque cas, si les deux formules sont équivalentes. Si oui, le prouver, sinon, trouver un contre-exemple :

1. $(p \wedge q) \Rightarrow r$ et $(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$
2. $(p \vee q) \Rightarrow r$ et $(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$
3. $(p \vee q) \Rightarrow r$ et $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$
4. p et $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$

6. Raisonnements valides

Exercice 1.
Par la méthode des arbres, trouver une forme normale disjonctive des formules suivantes :
1. $(p \vee q) \Rightarrow (r \Rightarrow \neg p)$
2. $(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
3. $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Exercice 2.
Vérifier par la méthode des arbres que les formules suivantes sont des tautologies :
1. $(p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p$;
2. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$;
3. $(p \wedge (p \vee q)) \Leftrightarrow p$;
4. $(\neg q \Rightarrow p) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow (\neg q \Rightarrow p))$;
5. $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$;
6. $\neg(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow \neg q)$;
7. $(p \vee q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q)$;
8. $\neg p \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow \neg p)$;

Exercice 3.
Montrer par la méthode des arbres que les déductions suivantes sont valides :
1. $p,\ q,\ (p \wedge q) \Rightarrow r\ \vdash\ q \Rightarrow r$;
2. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r,\ s \vee p,\ \neg(s \vee \neg t),\ t \Rightarrow q \vdash r$;
3. $\neg p \vee q,\ q \Rightarrow r\ \vdash p\ \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$;
4. $\neg p \vee q,\ q \Rightarrow \neg r\ \vdash\ p \Rightarrow \neg r$;
5. $(p \vee q) \Rightarrow r,\ r \Rightarrow s,\ q \wedge \neg s\ \vdash\ p \Rightarrow \neg r$;
6. $(p \vee q) \Rightarrow r,\ r \Rightarrow s,\ q \wedge \neg s \vdash \neg p$;
7. $q \Leftrightarrow \neg r,\ p \Leftrightarrow \neg q \vdash r \Leftrightarrow p$.

Exercice 4.
Dire si les raisonnements suivants sont valides. Pour cela, traduire les énoncés en formule propositionnelle et vérifier la validité par la méthode des arbres.

1. Si les poules ont des dents, alors les poules sont des mammifères.
   Or les poules ne sont pas des mammifères.
   Donc les poules n'ont pas de dents.
2. Pour que Pierre réussisse le cours de logique, il est nécessaire et suffisant que premièrement, il assiste au cours, que, deuxièmement il cesse de bavarder avec sa voisine, et, finalement qu'il écoute le professeur.
   Mais s'il écoute le professeur, c'est qu'il assiste au cours et qu'il cesse de bavarder avec sa voisine.
   Donc, il est nécessaire et suffisant que Pierre écoute le professeur pour qu'il réussisse le cours de logique.

Exercice 5.
Soit le raisonnement suivant :
Si Pierre vient à la fête, alors Marie est triste. Si Marie est triste, Jean ne vient pas à la fête. Mais si Jean ne vient pas à la fête, Pierre ne vient pas non plus. Donc Pierre ne vient pas à la fête.

a) Traduire ce raisonnement sous la forme $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$ où $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ sont des formules propositionnelles.
b) Trouver une formule propositionnelle qui exprime ce raisonnement.
c) Dire, en utilisant la méthode des arbres, si cet énoncé est valide.

Exercice 6.
Trouver les règles de dérivation qui peuvent être appliquée à la barre de SHEFFER ($\uparrow$) et à sa négation pour la méthode des arbres.
Trouver une forme normale disjonctive de $((p \uparrow q) \uparrow r) \uparrow (p \uparrow r)$

Exercice 7.
Les raisonnements suivants sont-ils valides ? S'il ne le sont pas, donner une interprétation des prémisses qui invalide la conclusion.

1. $a \Rightarrow (\neg b \vee c), \quad b \Rightarrow (a \wedge \neg c) \quad \vdash \quad c \Rightarrow b$
2. $a \Rightarrow (\neg b \vee c), \quad b \Rightarrow (a \wedge \neg c) \quad \vdash \quad \neg a \Rightarrow (\neg c \Rightarrow b)$
3. $p \Rightarrow (r \wedge t), \quad (t \vee s) \Rightarrow \neg q \quad \vdash \quad \neg(p \wedge q)b$
4. $(s \Rightarrow r) \wedge p), \quad q \quad \vdash \quad \neg r \wedge \neg s \wedge p$

Exercice 8. Pour préparer ses examens, un étudiant réfléchit à la stratégie à adopter :
« – *S'il fait beau demain, ou si je me lève tard, je ne pourrai pas travailler.*
– *La météo est formelle : il fera beau demain.*
– *C'est décidé, je vais travailler ou bien me lever tôt.* »
Puis il conclut :
« *Donc par conséquent, si je me lève tôt, je vais travailler.* »
Ce raisonnement est-il valide ?

Exercice 9.
En utilisant la méthode des arbres, dites si le raisonnement suivant est valide :
Les poules ont des dents si et seulement si les ours sont noirs. Or les poules ont des dents ou les lapins sont bleus. Mais si les lapins sont blancs, alors les ours sont noirs. Donc les poules ont des dents.

Exercice 10.
Pour chacune des formules suivantes, dire s"il s'agit d'une tautologie, d'une contradiction, ou d'une formule satisfiable :

1. $(p \wedge q \wedge r) \Rightarrow (p \vee q)$
2. $(a \Rightarrow c) \Leftrightarrow ((a \vee c) \Leftrightarrow b)$
3. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$
4. $(p \Leftrightarrow (q \vee r)) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow (p \vee r))$

7. Déduction naturelle

À l'aide des règles de la déduction naturelle, montrer que les déductions suivantes sont valides. Répondre aux questions dans l'ordre. On pourra utiliser une déduction déjà établie pour montrer une déduction qui suit.

1. Réflexivité de l'implication :
$$\vdash A \Rightarrow A$$
2. Montrer la validité de :
$$p \Rightarrow q \vdash (p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge r)$$
3. Montrer que si $\Gamma \vdash A \vee B$ et si $\Gamma \vdash \neg B$ alors $\Gamma \vdash A$. En déduire :
$$\neg A \vee B \vdash A \Rightarrow B$$
4. Lois de De Morgan :
   a) $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$
   b) $\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$
   c) $\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
5. Contraposition :
$$A \Rightarrow B \vdash \neg B \Rightarrow \neg A$$
6. Distributivité :
   a) Montrer que $A \vee B,\ A \Rightarrow C,\ B \Rightarrow D \vdash C \vee D$.
   b) Utiliser cette déduction pour montrer que :
$$A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$
7. Distributivité de l'implication avec $\wedge$:
$$A \Rightarrow (B \wedge C) \vdash (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)$$
8. Distributivité du $\vee$ avec l'implication :
$$(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C) \vdash (A \vee B) \Rightarrow C$$
9. Réciproque du précédent :
$$(A \vee B) \Rightarrow C \vdash (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$$
10. Négation d'une implication :
$$\neg(A \Rightarrow C) \vdash A \wedge \neg C$$
11. Réciproque de la précédente :
$$A \wedge \neg C \vdash \neg(A \Rightarrow C)$$
12. Réciproque du 7.
$$(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C) \vdash A \Rightarrow (B \wedge C)$$
13. Réciproque du 3.
$$A \Rightarrow B \vdash \neg A \vee B$$

8. Prédicats

Exercice 1.

Dans le domaine des personnes, avec le prédicat $c(x, y)$ qui signifie « x *connaît* y », traduire en formule les énoncés suivants :

1. Tout le monde se connaît soi-même.
2. Il existe une personne qui connaît tout le monde.
3. Personne ne connaît tout le monde.
4. Il y a quelqu'un que personne ne connaît.

Exercice 2. *une histoire de grenouilles*

Traduire les énoncés suivants dans le langage des prédicats en utilisant :

$$g(x) \text{ « } x \text{ est une grenouille »}, \qquad \text{et} \qquad v(x) : \text{ « } x \text{ est vert »}.$$

1. Toutes les grenouilles sont vertes.
2. Il existe des grenouilles vertes.
3. Aucune grenouille n'est verte.
4. Toutes les grenouilles ne sont pas vertes.
5. Toutes les grenouilles sont non vertes.
6. Quelques grenouilles sont vertes.
7. Certaines grenouilles ne sont pas vertes.
8. Toute chose est une grenouille.
9. Il est faux que toute chose soit une grenouille.
10. Il existe au plus une grenouille verte.
11. Il n'existe qu'une seule grenouille verte.

Exercice 3.

Énoncer dans la langue naturelle les formules suivante, avec la même interprétation des prédicats que dans l'exercice précédent :

1. $\forall x \; v(x) \Rightarrow g(x)$
2. $\forall x \; g(x) \wedge \exists x \; v(x)$

Exercice 4.

Pour chaque énoncé ci-après :

- Traduire les énoncés suivant dans le langage du calcul des prédicats en définissant précisément l'univers du discours et les prédicats utilisés :
- Énoncer intuitivement et traduire la négation.

1. Tout homme est un primate.
2. Les dauphins ne sont pas des primates.
3. Il existe des dauphins intelligents.
4. Aucun agneau n'est fumeur de cigare.
5. Une porte est ouverte ou fermée.
7. Les femmes sont plus intelligentes que les hommes.
8. Tout ce qui brille n'est pas or.
9. Seul le brave mérite la victoire.
10. Les herbivores ne mangent que des végétaux.
11. Aucun herbivore ne mange tous les types de végétaux.
12. Il y a un végétal que ne mange aucun herbivore.
13. Bienheureux celui qui ignore ce que signifie un mal de dents.
14. L'amitié est toujours réciproque.
15. Les souris vertes sont plus belles que les autres.
16. Les professeurs qui donnent des examens trop difficiles mériteraient d'être congédiés.

9. Le langage des prédicats

Exercice 1.
Les formules suivantes sont-elles bien construites ? pourquoi ?
1. $\forall x\ p(x) \wedge q(x)$
2. $(\forall x)\ \exists x\ p(x)$
3. $\forall x\ p(x, y) \wedge \forall z\ p(z)$
4. $\forall s\ \forall y\ \big(p(x) \Rightarrow q(x)\big)$
5. $\big(\exists x\ p(x, y) \wedge\big) p(z)$
6. $\exists\ \forall x\ q(x)$
7. $\forall p\ \forall q\ \forall x\ \big(q(x) \Rightarrow \big(p(x) \Rightarrow q(x)\big)\big)$

Exercice 2.
Dans les énoncés qui suivent, les symboles x, y et z sont des symboles de variable, le symbole f est un symbole de prédicat unaire et les symboles g et h sont des symboles de prédicats binaires. Dessinez l'arbre syntaxique de ces formules :
a) $g(x, y) \Longrightarrow \forall z\big(h(y, z) \vee (x = y)\big)$
b) $\forall x \forall y\ \big(f(x) \Longleftrightarrow \exists z\, h(z, y)\ \big)$

Exercice 2.
Quelle est la portée des quantificateurs dans chacune des formules suivantes ?
1. $\forall x\ p(x) \Rightarrow p(y)$
2. $\forall x\ \big(p(x) \Rightarrow p(y)\big)$
3. $\forall x\ \exists y\ \big(p(x) \Rightarrow p(y)\big)$
4. $\forall x\ p(x)\ \Rightarrow\ \exists y\ p(y)$
5. $\forall x\ \big(p(x)\ \Rightarrow\ \exists y\ p(y)\big)$
6. $\exists x\ \big(p(x) \Rightarrow \forall x\ p(x)\big)$
7. $\forall x\ \big(\exists x\ p(x) \Rightarrow q(x)\big)$

Exercice 3.
Dans les formules suivantes, indiquer quelles occurrences de variables sont liées et par quel quantificateur elles le sont :
1. $\forall x\ p(x)\ \Rightarrow\ \exists x\ r(x, y)$
2. $\forall x\ \exists y\ \forall x\ \big(p(x, y)\ \Rightarrow \exists x\ p(x, y)\big)$
3. $\forall x\ \big(\big(p(x, y)\ \Rightarrow\ \exists y\ \forall x\ p(x, y)\big) \Rightarrow r(x, x)\big)$

Exercice 4.
Dans les formules suivantes : – indiquer la portée des quantificateurs ;
– indiquer quelles sont les occurrences muettes et libres des variables ;
– indiquer l'arité de chaque formule.
1. $\forall x\ \forall y\ \big(p(x, y) \Rightarrow q(y)\big)$
2. $\forall x\ \big(p(x, y)\ \Rightarrow\ \forall y\ q(y)\big)$
3. $\forall x\ p(x)\ \Rightarrow\ \exists y\ q(x, y)$
4. $\forall x\ \exists y\ \big(p(x, y)\ \Rightarrow\ \exists z\ p(z, y)\big)$
5. $\forall x\ \big(p(x, y)\ \Rightarrow\ \exists y\ \forall x\ p(x, y)\big) \Rightarrow r(x, x)$

10. Interprétation, validité

Exercice 1.
On considère le domaine $D = \{\text{Pierre}, \text{Marie}, \text{Gérard}\}$, avec l'interprétation qui attribue aux symboles de constante a, b et c les valeurs $a = \text{Pierre}$, $b = \text{Marie}$, $c = \text{Gérard}$, et le prédicat binaire $p(x,y)$ donné par le graphe $\mathcal{G} = \big\{(a,b),(c,b),(b,b),(b,a),(a,c)\big\}$ qu'on peut traduire par « ... *apprécie*... ».

Donner une traduction en langue naturelle et dire si les formules suivantes sont vraies ou fausses :

1. $\exists x\ p(x,b)$
2. $\forall x\ p(x,a)$
3. $\forall x\ p(x,b)$
4. $\exists x\ \forall y\ p(y,x)$
5. $\exists x\ \forall y\ p(x,y)$
6. $p(a,b) \Rightarrow \exists x\ p(x,b)$
7. $\forall x\ p(x,b) \Rightarrow p(b,b)$
8. $\forall z\ p(z,z)$

Exercice 2.
Dans le domaine $D = \{a,b,c\}$, on considère le prédicat binaire $p(x,y)$ défini par le graphe $\mathcal{G} = \{(a,b),(b,b),(c,b),(c,a),(a,a)\}$? Dire si les formules suivantes sont vraies, justifier :

1. $\forall x\ \forall y\ p(x,y)$
2. $\exists x\ \forall y\ p(x,y)$
3. $\forall x\ \forall y\ \big(p(x,y) \vee p(y,x)\big)$
4. $\exists x\ \exists y\ \big(p(x,y) \Longrightarrow p(y,x)\big)$

Exercice 3.
r et s sont deux prédicats d'arité 2. On considère les deux formules suivantes :

(1) $\quad \exists x\ \forall y\ \big(r(x,y) \Rightarrow s(x,y)\big)$

(2) $\quad \forall x\ \exists y\ \big(r(x,y) \wedge s(x,y)\big)$

Le domaine d'interprétation est l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.
L'interprétation de r est l'inégalité $\leq$ et celle de s est la relation « *divise* ».
Donner, dans cette interprétation, les valeurs de vérité de ces formules.
Modifier le domaine d'interprétation $\mathcal{D}$, sans changer les interprétations de r et s pour que, avec la nouvelle définition de $\mathcal{D}$, les formules (1) et (2) soient vraies.

Exercice 4.
Trouver des formules équivalentes aux formules suivantes dans lesquelles le symbole de négation est placé uniquement devant les symboles de prédicat.

1. $\neg\ \forall x\ \big(p(x) \Rightarrow q(x)\big)$
2. $\neg\ \forall x\ \exists y\ p(x,y)$.
3. $\neg\ \forall x\ \exists y\ \big(p(x) \Rightarrow q(x,y)\big)$
4. $\neg\big(\forall x\ p(x) \Rightarrow (\exists y\ (p(y) \Rightarrow r(y)) \wedge \exists z\, r(z))\big)$
5. $\neg\big(\forall x\ (p(x) \Leftrightarrow r(x)) \Rightarrow \exists y\ (p(y) \wedge r(y))\big)$
6. $\neg\big(\forall x \exists y \forall z\ r(x,y,z) \Rightarrow \exists t\ (p(t) \Rightarrow q(t))\big)$

Exercice 5.
On considère les formules suivantes sur le domaine $\mathcal{D} = \{a,b\}$:

$F_1 \qquad \forall x\, \exists y\ q(x,y)$

$F_2 \qquad \exists x\, \forall y\ q(x,y)$

1. Donner un modèle de la formule F_1 dans lequel la formule F_2 est fausse.
2. Donner un modèle de la formule F_2 dans lequel la formule F_1 est fausse.

11. Méthode des arbres en calcul des prédicats

Exercice 1.
Trouver un modèle pour les formules suivantes :
1. $\big(\forall x\ p(x,x)\big) \wedge \big(\exists x\ \forall y\ p(x,y)\big) \wedge \big(\exists x\ \exists y\ \neg p(x,y)\big)$
2. $\forall x\ \neg p(x,x) \wedge \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(p(x,y) \wedge p(y,x) \wedge \neg p(x,z)\big)$;
3. $\forall x\ \exists y\ p(x,y) \wedge \forall x\ \neg p(x,x) \wedge \neg\forall x\ \forall y\ (p(x,y) \Rightarrow p(y,x))$;
4. $\exists x\ \forall y\ p(x,y) \wedge \exists x\ \forall y\ \neg p(x,y) \wedge \exists x\ (\neg p(x,x) \wedge \exists y\ p(x,y))$.

Exercice 2.
Vérifier que les formules suivantes sont valides :
1. $\forall x\ \neg p(x) \Rightarrow \forall x\ \big(p(x) \Rightarrow q(x)i\big)$;
2. $\exists x\ \big(p(x) \Rightarrow q(x)\big) \Rightarrow \big(\forall x\ p(x) \Rightarrow \exists x\ q(x)\big)$;
3. $\big(\forall x\ p(x) \Rightarrow \exists x\ q(x)\big) \Rightarrow \exists x\ \big(p(x) \Rightarrow q(x)\big)$.

Exercice 3.
Montrer que les raisonnements suivants sont valides :
1. $\forall x\ (p(x) \Rightarrow q(x)),\ \neg\exists x\ q(x) \quad \vdash \quad \neg\exists x\ p(x)$;
2. $\neg\exists x\ p(x) \quad \vdash \quad \forall x\ (p(x) \Rightarrow q(x))$.
3. $\exists x\ \neg q(x),\ \forall x\ p(x) \quad \vdash \quad \neg\forall x\ (p(x) \Rightarrow q(x))$;
4. $\forall x\ (p(x) \Rightarrow \neg q(x)),\ \forall x\ (p(x) \wedge r(x)) \quad \vdash \quad \exists x\ \neg q(x)$;
5. $\exists x\ p(x,b) \Rightarrow \forall x\ q(x),\ \forall x\ p(a,x) \quad \vdash \quad \forall x\ (r(x,c) \Rightarrow q(x))$;
6. $\exists x\ p(x),\ \exists x\ q(x) \quad \vdash \quad \exists x\ (\exists y\ p(y) \wedge q(x))$;
7. $\forall x\ \exists y\ (p(x,y) \Rightarrow q(b,x)),\ \forall x\ \forall y\ p(x,y) \quad \vdash \quad \exists x\ q(x,x)$;
8. $\exists x\ p(x) \wedge \forall x\ q(x) \quad \vdash \quad \exists x\ (p(x) \wedge q(x))$;

Exercice 4.
Les raisonnements suivants sont-ils corrects ? Pour le déterminer, transcrire les énoncés dans le langage des prédicats et vérifier la validité du raisonnement par la méthode des arbres :
1. Tous les gens égoïstes sont impopulaires, tous les gens serviables sont populaires donc tous les gens serviables ne sont pas égoïstes.
2. Tous les soldats savent marcher au pas, quelques bébés ne sont pas des soldats donc quelques bébés ne savent pas marcher au pas.
3. Aucun de mes fils n'est malhonnête, on respecte toujours un homme honnête donc tous mes fils sont respectés.
4. Tous les étudiants studieux réussissent, tous les étudiants ignorants échouent donc tous les étudiants studieux sont instruits et tous les étudiants ignorants sont paresseux (ignorant = non instruit et studieux = non paresseux).

Exercice 5.
Vérifier la validité de la formule suivante : $\exists x\ \big(p(x) \Longrightarrow \forall x\ p(x)\big)$. Quelle est la signification de cette formule ?

Exercice 6. *Distributivité du $\forall$ sur le $\vee$*
1. Montrer que :
$$\big(\forall x\ p(x) \vee \forall x\ q(x)\big) \Rightarrow \forall x\ \big(p(x) \vee q(x)\big)$$
2. Trouver un modèle pour la négation de la réciproque.

12. Déduction naturelle en calcul des prédicats

Exercice 1. *quelques déductions naturelles en calcul des propositions pour réviser*
Montrer que les déductions suivantes du calcul des propositions sont valides en utilisant les règles de la déduction naturelle :

1. $p,\ p \Rightarrow (p \Rightarrow r) \quad \vdash \quad r$
2. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \quad \vdash \quad q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
3. $p,\ q \Rightarrow (p \Rightarrow r) \quad \vdash \quad q \Rightarrow r$
4. $(p \Rightarrow q) \quad \vdash \quad (p \wedge r) \Rightarrow q$
5. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \quad \vdash \quad (p \wedge q) \Rightarrow r$
6. $\neg(p \Rightarrow q) \quad \vdash \quad \neg q$
7. $\neg(p \Rightarrow q) \quad \vdash \quad p$
8. $p \Rightarrow q \quad \vdash \quad \neg q \Rightarrow \neg p$

Exercice 2.
Montrer que les déductions suivantes du calcul des prédicats sont valides en utilisant les règles de la déduction naturelle :

1. $\exists x\ \big(p(x) \vee q(x)\big) \ \vdash\ \exists x\ p(x)\ \vee\ \exists x\ q(x)$
2. $\neg\ \exists x\, p(x) \quad \vdash \quad \forall x\ \neg p(x)$
3. $\forall x\ \neg p(x) \quad \vdash \quad \forall x\ \big(p(x) \Rightarrow q(x)\big)$
4. $\forall x\, p(x) \quad \vdash \quad \neg\ \exists x\ \neg p(x)$
5. $\forall x\ q(x) \quad \vdash \quad \forall x\ \big(p(x) \Rightarrow q(x)\big)$

Exercice 3.
Traduire les raisonnements suivants en formules calcul des prédicats et vérifier leur validité en utilisant les règles de la déduction naturelle :

1. Si la vie n'a pas de sens, rien n'a de sens. Mais philosopher a un sens. Donc la vie a un sens.
   $s(x)$: « x a un sens » ;
   p : la constante « philosopher » ;
   v : la constante « la vie ».
2. Les logements à prix modérés sont rares. Les choses rares ne sont pas à prix modéré. Il n'existe donc pas de logement à prix modéré.
   $\ell(x)$: « x est un logement » ;
   $m(x)$: « x est à prix modéré » ;
   $r(x)$: « x est rare ».
3. Ceux qui croient ce que disent les voyantes sont stupides, mais ceux qui sont sincères croient ce qu'ils disent. Par conséquent, les voyantes sincères sont stupides.
   $v(x)$: « x est une voyante » ;
   $c(x, y)$: « x croit ce que dit y » ;
   $d(x)$: « x est stupide (*dummy*) » ;
   $s(x)$: « x est sincère ».
4. Les amis de mes amis sont mes amis. Comme l'amitié est réciproque et que j'ai au moins un ami, je suis mon propre ami.
   $a(x, y)$: « x est l'ami de y » ;
   m : « moi ».

Exercice 4.
Soit le raisonnement : « Tout individu sain d'esprit comprend la logique. Aucun malade mental ne peut être juré. Aucun de vos fils ne comprend la logique. Donc aucun de vos fils ne peut devenir juré. »

Traduire ce raisonnement dans le langage des prédicats en utilisant $s(x) =$ « x est sain d'esprit », $\ell(x) =$ « x comprend la logique », $f(x) =$« x est un de vos fils » et $j(x) =$ « x peut devenir juré ».

Vérifier la validité de ce raisonnement par la méthode des arbres, puis avec les règles de la déduction naturelle.