Exercices de Programmation Linéaire
– Modélisation –

exercice 1 : On veut préparer 500 litres de punch à partir de cinq boissons A, B, C, D et E. Le punch doit comporter au moins 20% de jus d'orange, 10% de jus de pamplemousse et 5% de jus de framboise. D'après les données suivantes, quelle quantité de chaque boisson est nécessaire pour obtenir la composition requise au coût minimum ?

boisson	jus d' orange (%)	jus de pamplemousse (%)	jus de framboise (%)	quantité disponible (l)	prix/l
A	40	40	0	200	1.50
B	5	10	20	400	0.75
C	100	0	0	100	2.00
D	0	100	0	50	1.75
E	0	0	0	800	0.25

exercice 2 : Un avion cargo possède trois compartiments pour le chargement de frêt : un à l'avant, un au centre et un dernier à l'arrière. Les limites de capacité en poids et en volume sont résumées dans le tableau suivant :

compartiment	capacité	
	poids (tonne)	volume (m^3)
avant	12	1000
centre	18	1300
arrière	10	700

Pour des raisons de stabilité de l'avion en vol, le chargement doit être équilibré dans chaque compartiment, c'est-à-dire que, pour les trois compartiments, le chargement doit représenter la même proportion, en poids, de la limite de charge. L'avion a la possibilité de charger les quatre frêts suivant :

frêt	poids (tonne)	encombrement (m^3/tonne)	bénéfice (euro / tonne)
1	20	70	220
2	16	100	280
3	25	85	250
4	13	60	200

On peut prendre n'importe quelle portion de ces frêts. En d'autres termes, on peut choisir de ne pas transporter l'intégralité d'un frêt. Écrire le problème qui consiste à trouver un chargement de cet avion qui maximise le bénéfice sous forme d'un programme linéaire.
supplément : Comment faire lorsque chaque type de frêt est composé de palettes de 500 kg ?

exercice 3 : Mergin Equipements fabrique de gros transformateurs électriques. Les commandes de la companie pour les six prochains mois sont donnés dans le tableau ci-après. Les coûts de fabrication d'un transformateur sont sujets à des variations dues au cours des matières premières et au prix de la main d'œuvre. L'usine peut fabriquer jusqu'à 50 unités par mois en heures normales et 20 unités supplémentaires en heures supplémentaires. Les coûts de ces deux types de production sont également donnés dans le tableau.

mois	janvier	février	mars	avril	mai	juin
nombre d'unités commandées	58	36	34	69	72	43
coût en heures normales (Keuro)	18.0	17.0	17.0	18.5	19.0	19.0
coût en heures supp. (Keuro)	20.0	19.0	21.0	22.0	22.0	23.0

Le coût de stockage d'un transformateur invendu est de 500 euros par mois. La companie possède 15 unités en stock début janvier et aimerait en avoir au moins 5 en stock fin juin (i.e. début juillet). Formuler le problème consistant à déterminer le plan de production le plus rentable sous la forme d'un programme linéaire.

exercice 4 : Un investisseur a deux activités d'épargne A et B au début d'une période de 5 ans. Chaque euro investi en A au début d'une année rapporte 1.40 euro (soit un profit de 0.40 euro) au bout de 2 ans, qu'il peut aussitôt réinvestir. Chaque euro investi en B au début d'une année rapporte 1.70 euro au bout de 3 ans. Deux autres actions C et D peut être envisagées à l'avenir. Chaque euro investi en C au début de la seconde année rapporte 1.90 euro à la fin de l'année 5. Pour l'action D, 1 euro investi au début de l'année 5 rapporte 1.30 euro à la fin de cette même année. L'épargnant commence la période avec 60000 euro et souhaite connaître un plan d'épargne qui maximise la somme totale accumulée en début de sixième année. Formuler ce problème comme un programme linéaire.
supplément : Comment faire lorsqu'on fixe un plafond d'investissement dans chaque activité d'épargne ? L'intégration d'une fiscalisation constante sur les plus-values financières modifie-t-elle la formulation ? Et si la fiscalisation est

linéaire croissante pas morceaux ? Comment faire pour prendre en compte une inflation sur chaque année ?

exercice 5 : Un supporter du PSG désire faire une prière à la Bonne Mère sur les hauteurs de Marseille. À cet effet, il consulte sa carte de France pour trouver la meilleure route possible et il identifie les tronçons suivants :

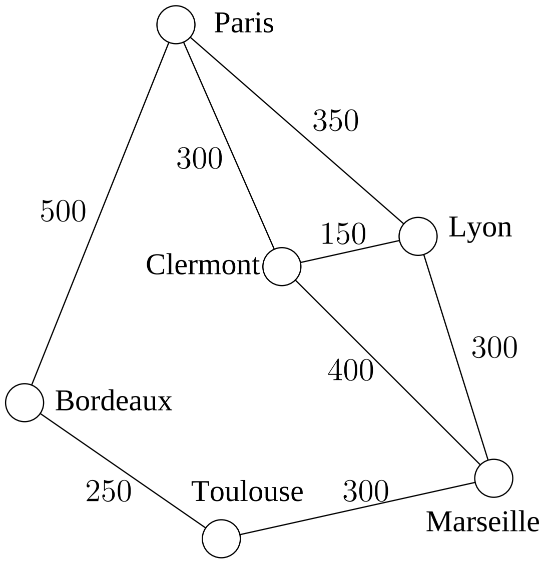

Figure 1 – Carte des déplacements possibles

Les sommets sont des villes et le kilométrage est indiqué sur les arcs du graphe.

1. Formaliser le problème de trouver le chemin le plus court comme un programme linéaire.
2. On considère maintenant que certains supporters de l'OM peuvent se trouver sur les différentes portions de route, ce qui pourrait l'empêcher de continuer son chemin. Si la probabilité p_{ij} de rencontrer un supporter de l'OM est constante, quelque soit la route, proposer une formulation permettant de maximiser ses chances d'arriver à Marseille.
3. Si maintenant la probabilité p_{ij} est spécifique à chaque arc (i, j), on ne peut plus appliquer l'astuce prédédente. Montrer qu'on peut reformuler le problème de manière à ne faire intervenir que des multiplications de probabilités. Utiliser alors la transformation en log pour retrouver des additions et proposer un modèle linéaire. Que doit-on faire pour convertir la solution obtenue en une solution utilisable ?
4. On suppose que notre supporter a pu faire le voyage. Il téléphone à ses amis pour leur dire que la vue est très belle du haut de la colline. Si on considère maintenant que les valeurs sur les arcs (i, j) sont les places disponibles sur des trains faisant le trajet entre les villes i et j, combien d'amis maximum peuvent venir ?

Exercices de Programmation Linéaire
– Simplexe Primal –

exercice 1 : Résoudre le programme linéaire suivant par la méthode du simplexe

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Max } z = 5x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 8x_4 \\ \text{s.c.} \\ \qquad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leqslant 5 \\ \qquad x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leqslant 3 \\ \qquad x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ x_4 \geqslant 0 \end{array}}$$

– en faisant entrer en base la variable hors base dont le coût réduit est le plus grand
– en faisant entrer en base la variable hors base dont l'augmentation de valeur réelle engendre la plus grande augmentation dans la fonction objectif

exercice 2 : Résoudre le programme linéaire à l'aide de l'algorithme primal du simplexe à deux phases

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Max } z = x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \text{s.c.} \\ \qquad 2x_1 + x_2 - x_3 \leqslant -1 \\ \qquad x_1 - 2x_2 + x_3 \leqslant -2 \\ \qquad x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3 \geqslant 0 \end{array}}$$

exercice 3 : On considère le programme linéaire suivant

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Min } z = 3x_1 + x_2 - 2x_4 \\ \text{s.c.} \\ \qquad 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leqslant 2 \\ \qquad x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 \geqslant 3 \\ \qquad -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ \qquad -x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ -x_4 \geqslant 0 \end{array}}$$

La solution $x = (-2,\ 5,\ 0,\ 0)$ est-elle une solution réalisable ? Après avoir introduit deux variables d'écart, on se demandera si à x correspond une solution de base du programme linéaire transformé. Dans l'affirmative, est-elle optimale ?

exercice 4 (Klee & Minty)) : On considère le programme linéaire suivant

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Max } z = 100x_1 + 10x_2 + x_3 \\ \text{s.c.} \\ \qquad x_1 \leqslant 1 \\ \qquad 20x_1 + x_2 \leqslant 100 \\ \qquad 200x_1 + 20x_2 + x_3 \leqslant 10000 \\ \qquad x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3 \geqslant 0 \end{array}}$$

– En initialisant en $x = (0,\ 0,\ 0)$, résoudre le problème par la méthode du simplexe
– Vérifier que la transformation linéaire $x_1 = y_1,\ x_2 = 100y_2,\ x_3 = 10000y_3$ transforme le polyèdre antérieur dans le cube unitaire de $\mathbb{R}^3$. Vérifier que l'algorithme a parcouru tous les sommets du cube avant de trouver le sommet optimal.
– Que suggérer pour remédier à ce problème ?

exercice 5 (examen juin 2007) : On considère le programme linéaire (P) suivant :

$$(P)\left\{\begin{array}{lrcrcrcr} \text{Max} & x_1 & - & 2x_2 & + & 20x_3 & & \\ \text{s.t.} & & & & & & & \\ & 10x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & \geq & 30 \\ & & & 5x_2 & - & x_3 & \geq & 10 \\ & 25x_1 & - & 10x_2 & + & 2x_3 & \leq & 105 \\ & \multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, x_3 \geq 0.} \end{array}\right.$$

(a) Appliquez la phase I du simplexe au problème (P) pour montrer qu'il admet une solution réalisable de base.
(b) À partir de la résolution précédente, conclure quant à l'optimisation du problème (P).
(c) On se propose d'insérer la contrainte $x_1 - 2x_2 + 20x_3 \leq 98$ dans le programme linéaire (P). A-t-on une base optimale ? Est-elle unique ? Justifiez votre réponse.

exercice 6 (examen juin 2009) : On considère le programme linéaire $\mathcal{P}_\alpha$ suivant où α est un réel :

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Max } z = 2x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 \\ \text{sous les contraintes} \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 24 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 60 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}\right.$$

- On considère le problème $\mathcal{P}_4$. On nous informe que $x_1 > 0$, $x_2 = 0$ et $x_3 > 0$ dans la base optimale de $\mathcal{P}_4$.
  - Comment utiliser cette information pour résoudre le problème $\mathcal{P}_4$ donné en un nombre minimum d'itérations. Étudier, sans développer aucune itération, la solution optimale de $\mathcal{P}_4$ et donner cette solution quand c'est possible.
  - Donner le dual $\mathcal{D}_4$ de $\mathcal{P}_4$. Déduire de la question précédente et sans aucun calcul supplémentaire, la valeur des variables duales et des variables d'écart duales.
- En tenant compte des calculs effectués dans la partie précédente, résoudre par le simplexe révisé, le problème $\mathcal{P}_5$.

exercice 7 (juin 2011) : soit (P) le programme linéaire suivant :

$$(P)\left\{\begin{array}{ll} \max & 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 \\ \text{s.t.} & \\ & 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 \leq 40 \\ & 9x_1 + 5x_2 + 7x_3 \geq 35 \\ & 7x_1 + 3x_2 + 3x_3 \geq 51 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}\right.$$

- Montrer qu'une seule des solutions suivantes est réalisable de base pour (P). Justifier chaque cas.
  - $x^1 = (\frac{5}{3}, 3, 0)$
  - $x^2 = (\frac{51}{7}, 0, 0)$
  - $x^3 = (4, 2, 6)$
- En partant de la solution obtenue en 1), optimiser le programme linéaire (P). Écrire le dual (D) de (P).
- Sans aucun calcul, utiliser les questions précédentes pour obtenir la solution du dual (D).
- On suppose maintenant que le sens de l'inégalité dans la 2ème contrainte de (P) est inversé, c'est-à-dire qu'on remplace $9x_1 + 5x_2 + 7x_3 \geq 35$ par $9x_1 + 5x_2 + 7x_3 \leq 35$. Montrer en utilisant la phase I du simplexe que le nouveau programme linéaire est irréalisable.

Exercices de Programmation Linéaire
– Dualité –

<u>exercice 1 :</u> Écrire le dual du programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{l} \text{Max } z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.c.} \\ \qquad x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ \qquad 2x_1 - x_2 - 5x_3 + 2x_4 \geqslant 1 \\ \qquad 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 \leqslant 2 \\ \qquad x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \leqslant 0, x_4 \text{ qcq} \end{array}$$

<u>exercice 2 :</u> On considère le programme linéaire (P) suivant :

$$\begin{array}{l} \text{Max } z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.c.} \\ \qquad 2x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ \qquad x_1 - x_2 \leqslant 1 \\ \qquad x_1 + x_2 \leqslant 3 \\ \qquad x_1 \,,\; x_2 \geqslant 0 \end{array}$$

- Écrire le dual (D) de (P).
- Vérifier que $x = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$ est solution réalisable de (P) et que $y = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 5/2 \end{pmatrix}$ est solution réalisable de (D). Conclusion ?

<u>exercice 3 :</u> On considère le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{l} \text{Min } z = 14x_1 + 10x_2 - 3x_3 \\ \text{s.c.} \\ \qquad x_1 + 2x_2 - x_3 \geqslant 2 \\ \qquad 2x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 1 \\ \qquad x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \leqslant 0 \end{array}$$

En utilisant le théorème des écarts complémentaires, déterminer la solution optimale de ce programme linéaire.

<u>exercice 4 :</u> Résoudre par la méthode du simplexe :

$$\begin{array}{l} \text{Min } z = -x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\ \text{s.c.} \\ \qquad 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 4 \\ \qquad x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leqslant 6 \\ \qquad x_1 \,,\; x_2 \,,\; x_3 \geqslant 0 \end{array}$$

Indiquer le problème dual et donner une interprétation complète à chaque itération : la solution primale, la base B et B^{-1}, la solution duale et sa valeur, les contraintes duales qui sont satisfaites.

<u>exercice 5 :</u> Une entreprise fabrique 3 produits à partir de 3 ressources. Le processus de fabrication de certains produits peut créer certaines ressources (c'est le cas par exemple de la fabrication de certains produits pétroliers). Le premier produit utilise 3 unités de la ressource 1, 1 unité de la ressource 2 et 1 unité de la ressource 3. Le deuxième produit utilise 1 unité des ressources 1 et 3 et produit 1 unité de la ressource 2. Enfin le troisième produit utilise 1 unité de la ressource 1, 2 unités de la ressource 2 et produit 1 unité de la ressource 3. Le premier produit rapporte 4, le troisième rapporte 2, tandis que le deuxième <u>coûte</u> 2 par unité produite. On dispose au départ de 180, 30 et 60 unités des ressources 1, 2 et 3 respectivement.

- Écrire le programme linéaire dont la résolution permet de trouver la production qui maximise le bénéfice.
- Résoudre ce programme linéaire par la méthode du simplexe.
- Vérifier votre solution soit en utilisant la dualité soit en utilisant le théorème des écarts complémentaires.
- Quel serait le prix maximum à payer pour une unité supplémentaire des ressources 1, 2 et 3 ? Quel serait le prix minimum de revente de ces produits ?
- À partir de quel bénéfice sur le produit 3 devient-il rentable d'en produire ?
- Quel est l'intervalle dans lequel le coût de fabrication du produit 2 peut varier sans changer la solution optimale ?
- Quelles sont l'augmentation et la diminution permises de la quantité disponible de la ressource 2 qui ne change pas la base optimale ?

Exercices de Programmation Linéaire
– Compléments –

exercice 1 : Soit programme linéaire $P(a,b)$ suivant :

$$\begin{array}{|l|}\hline \text{Max } z = 7x_1 + 11x_2 + (12-b)x_3 + 9x_4 \\ \text{s.c.} \\ \quad x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 \leqslant 20\text{-a} \\ \quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \leqslant 6 \\ \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \\ \hline \end{array}$$

- À quelle(s) condition(s) la base $B = \{2,4\}$ est-elle réalisable ? Dans quel cas n'y a-t-il pas unicité de l'optimum ? Expliciter la(les) nouvelle(s) base(s).
- On supposera dans toute la suite que B est réalisable. Écrire le dual $D(a,b)$ de $p(a,b)$. Représenter $D(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$. Déterminer les variables duales associées à la base B. Retrouver la condition d'optimalité de la première question.
- Pour toutes les questions suivantes, on pose $a = b = 0$. On ajoute une variable $u \geqslant 0$ au problème primal, de gain c, de coefficient -2 dans (1) et 10 dans (2). Comment est transformé le problème dual ? Pour quelles valeurs de c la base B conserve-t-elle son caractère optimal ? On complètera le dessin avec $c = 20$.
- Si on ajoute maintenant au lieu de u une variable $v \geqslant 0$, de gain 1, de coefficients -2 et -3, que peut-on dire à partir du primal et du dual ?

exercice 2 : On veut fabriquer 3 produits $P1$, $P2$ et $P3$ dont le profit unitaire est de 250, 100 et 100 euros respectivement. Le produit $P1$ ($P2$) ($P3$) nécessite 2, 5, 5 et 2 (3, 2, 3 et 1) (1, 0, 0 et 1) tonnes de nickel, chrome, germanium et magnésium. On peut disposer de 7, 11, 10 et 6 tonnes de Ni, Cr, Ge et Mg par jour. Les produits $P1$ et $P2$ doivent passer par un four séparément 1 et 2 heures quotidiennement. Le four est opérationnel 6 heures par jour. On veut connaître la politique de production qui maximise le profit. Écrire et résoudre le dual du problème décrit. Interpréter la solution optimale du dual et en déduire la solution du problème primal.

exercice 3 : Résoudre le problème suivant à l'aide du simplexe en variables bornées

$$\begin{array}{|l|}\hline \text{Max } z = 4x_1 + 12x_2 + 7x_3 + 10x_4 \\ \text{s.c.} \\ \quad x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 17 \\ \quad x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 17 \\ \quad i - 1 \leqslant x_i \leqslant i + 1 \\ \hline \end{array}$$

- on choisit comme base initiale $B = \{x_1, x_4\}$ correspondant à la solution $x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
- comment faire lorsqu'on ne connait pas de base initiale ?

exercice 4 : Résoudre le problème suivant à l'aide du simplexe en variables bornées

$$\begin{array}{|l|}\hline \text{Max } z = 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{s.c.} \\ \quad 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 \leqslant 48 \\ \quad 8x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leqslant 72 \\ \quad 1 \leqslant x_1 \leqslant 10 \\ \quad 2 \leqslant x_1 \leqslant 5 \\ \quad 3 \leqslant x_1 \leqslant 5 \\ \quad 4 \leqslant x_1 \leqslant 8 \\ \hline \end{array}$$

exercice 5 : Résoudre le problème suivant à l'aide du simplexe en variables bornées

$$\begin{array}{|l|}\hline \text{Max } z = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 \\ \text{s.c.} \\ \quad 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 4x_5 \leqslant 19 \\ \quad i - 1 \leqslant x_i \leqslant i + 1 \\ \hline \end{array}$$