Chapitre 04 : Dualité

1. Interception canonique de la dualité :

une entreprise A fabrique 2 produits $P_1 . P_2$ à l'aide de matière première $M_1 . M_2 . M_3$

	P_1	P_2	disponibilité
M_1	2	1	8
M_2	1	2	7
M_3	0	1	3
Profit	4	5	

$2x_1 + x_2 \leq 8$

$x_1 + 2x_2 \leq 7$

$x_2 \leq 3$

$Max\ 4x_1 + 5x_2$

la tache de production est de faire fonctionner l'usine de manière optimale selon le modèle mathématique

$$PL \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ x_2 \leq 3 \\ 4x_1 + 5x_2 = Z\max \end{cases}$$

Supposons une entreprise B s'adresse à l'entreprise A et propose à cette dernière d'acheter la totalité des matières première $M_1 . M_2 . M_3$ a un prix unitaire $y_1 . y_2 . y_3$ respectivement

- Quel prix l'entreprise B doit-elle propose afin de minimiser ses dépenses tout en obtenant l'accord de l'entreprise A ?
- Le prix de vente d'une unité de P_1 (resp P_2) est 4 (resp 5) il nécessite 2 unité (resp 1) de M_1, 1 unité (resp 2) de M_2 et 0 unité de M_3
- L'entreprise A acceptera la proposition

$$2y_1 + y_2 \geq 4$$

$$y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 5$$

L'entreprise B cherche à minimiser le coût d'achat sous ses contraintes : $Min\ w = 8y_1 + 7y_2 + 3y_3$

PL(B) $\begin{cases} y_1 + y_2 \geq 4 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 5 \\ 8y_1 + 7y_2 + 3y_3 = \text{Min}\, w \end{cases}$

PL(B) est le dual de PL(A)

PL(A) est appelé programme primal noté (P)

PL(B) est " " dual noté (D)

II. Comment formuler le dual.

Notons que à chaque programme primal (P), il existe un autre programme linéaire dual (D) et vice versa

les deux programmes contiennent les mêmes éléments mais arrangés de manière differente.

- le programme (P) est caracterisé par le tableau simplex

$$\left(\begin{array}{c|c} A & b \\ & \\ \hline c & \end{array}\right)$$

par definition le problème Dual est obtenant en transposant ce tableau

$$\left(\begin{array}{c|c} A^t & c^t \\ & \\ \hline b^t & \end{array}\right)$$ et en appliquant les règles suivantes:

Primal (P)	Dual (D)
Max Z	Min w
contraintes $\geq$	$y_i \leq 0$
contraintes $\leq$	$y_i \geq 0$
contraintes $=$	y_i qlq
$x_i \geq 0$	contraintes $\geq$

$x_i \leq 0$	contrainte ≤ 0
x qlq	contraintes $=$

Exemples d'application :

$$
(P_1)\begin{cases}
x_1 - x_2 - x_3 \leq 2 \\
2x_1 + x_2 + x_3 \geq 3 \\
x_1 + x_2 \leq 1 \\
x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \text{ qlq} \\
Z\max : 2x_1 + x_2 - x_3
\end{cases}
$$

$x_1 \geq 0$	$x_2 \leq 0$	x_3 qlq			
1	-1	-1		2	$y_1 \geq 0$
2	1	1		3	$y_2 \leq 0$
1	1	0		1	$y_3 \geq 0$
Max 2	1	-1			

1	2	1	$\geq$	2
-1	1	1	$\leq$	1
-1	1	0	$=$	-1
Min 2	3	1		

$$
(D)\begin{cases}
y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 2 \\
-y_1 + y_2 + y_3 \leq 1 \\
-y_1 + y_2 = -1 \\
y_1 \geq 0 \quad y_2 \leq 0 \quad y_3 \geq 0 \\
Min(w) = 2y_1 + 3y_2 + y_3
\end{cases}
$$

$$
(P_2)\begin{cases}
3x_1 + 2x_2 \geq 11 \\
-2x_1 + x_2 \leq 2 \\
x_1 - x_2 \leq 0 \\
x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \\
3x_1 - 2x_2 = Z\max
\end{cases}
$$

- Chaque contrainte dans le primale représente une var dans dual
- Le signe de var $\neq$ le signe de contrainte
- Nombre de var dans primale = Nombre de contrainte dans dual

$x_1 \geq 0$	$x_2 \geq 0$			
3	2		11	$y_1 \leq 0$
-2	1		2	$y_2 \geq 0$
1	-1		0	$y_3 \geq 0$
Max 3	-2			

3	-2	1	$\geq$	3
2	1	-1	$\geq$	-2
Min 11	2	0		

$$
(D)\begin{cases}
3y_1 - 2y_2 + y_3 \geq 3 \\
2y_1 + y_2 - y_3 \geq -2 \\
y_1 \leq 0 \quad y_2 \geq 0 \quad y_3 \geq 0 \\
Min(w) = 11y_1 + 2y_2
\end{cases}
$$

Exercice :

Trouver le primal de ce dual

$$
(D)\begin{cases}
2y_1 + y_2 + y_3 \geq 3 \\
y_1 - y_2 + y_3 \geq 2 \\
6y_1 + y_2 + 3y_3 = w(\min) \\
y_{1,2,3} \geq 0
\end{cases}
$$

- Vérifié si $\bar{y}\ (0, \frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ est une sol réalisable pour (D)

- Calculer $w(\bar{y})$.
- Vérifie si $\bar{x}(2,1)$ est une sol réalisable pour (P).
- Calculer $Z(\bar{x})$.
- Comparer $w(\bar{y})$ et $Z(\bar{x})$

-> Solution :

$$(P)\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 6 & 5 \le 6 \\ x_1 - x_2 \le 1 & 1 \le 1 \\ x_1 + x_2 \le 3 & x_1, x_2 \ge 0 \\ 3x_1 + 2x_2 = Z\max & 3(2)+2(1) \end{cases}$$

- $\bar{y}(0, \frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ est une solution réalisable car elle vérifié toutes les contraintes.
- $w(\bar{y}) = 8$
- $\bar{x}(2,1)$ est une solution réalisable pour (P) car elle vérifié toutes les contraintes.
- $Z(\bar{x}) = 8$

$$\Rightarrow w(\bar{y}) = Z(\bar{x}).$$

dans l'optimalité les vals de la fonction obj sont =.

- Aspects theoriques de la dualité

Considerons un produit (P) et son dual (D) comme suit

$$(P)\begin{cases} Ax \le b & x \ge 0 \\ CX = Z\max \end{cases}$$

$$(D)\begin{cases} yA \ge c & y \ge 0 \\ yb = w(\min) \end{cases}$$

Théorème 02 : Si $(\bar{x}, \bar{y})$ constituent un couple de solution réalisable de (P, D) alors $c\bar{x} \le \bar{y}b$

Théorème 01 : Le dual de dual est le primal.

Démonstration de théorème 02 :

$\forall (\bar{x}, \bar{y})$ solutions réalisables $c\bar{x} \le \bar{y}b$

$$P\begin{cases} Axy \le by \\ Z\max = CX \end{cases} \quad D\begin{cases} yAx \ge Cx \\ W\min = by \end{cases}$$

$\forall x\, y$ deux solution réalisables $cx \le by$

Théorème 03 :

Si $(\bar{x}, \bar{y})$ constitue couple de solutions réalisables de (P, D) si de plus $c\bar{x} = \bar{y}b$ alors $(\bar{x}, \bar{y})$ est couple de solutions optimales

$\forall$ x une solution réalisable

IP $cx \leq \bar{y}b$ $cx \leq c\bar{x}$

=> $\bar{x}$ est une sol optimale

$\forall y$ une solution réalisable ID

$yb \geq c\bar{x}$ $yb \geq \bar{y}b$

=> $\bar{y}$ est une sol optimale

Théorème 04:

1. Si (P) et (D) admettent des solutions réalisables finies alors (P) et (D) admettent des solutions optimales et leurs valeur à l'optimum sont égaux.

2. Si l'un des deux n'est pas borné alors l'autre n'admet pas de solutions réalisables.

3. Si le primal (P) (resp (D)) n'admet pas de solutions réalisables alors son dual (resp son primal) est non borné ou bien n'admet pas de solutions réalisables.

		(P) admet une solution réalisable		(P) n'admet pas de sols réalisables
		optimale	Non bornée	
(D) admet de solutions réalisables	optimale	$z\max = w\min$		
	Non bornée			(D) non bornée $w \to -\infty$ (P) pas de sols
(D) n'admet pas de solutions réalisables			$z \to +\infty$ (D) pas de sol	(D) n'admet pas de sol.

Comment obtenir les solutions primal-dual :

Le lien entre le primal (P) et son dual (d) ne s'arrête pas seulement à vérifier que les valeurs de leurs fonctions objectives sont égales.

En effet, il suffit de résoudre l'un des programmes pour constater les solutions optimales de l'autre.

- A chaque variable de décision dual lui correspond une variable d'écart primale et à chaque variable d'écart dual lui correspond une variable de décision primale comme il est montré ci-dessous

Primal	Dual
var décision	var décision
var d'écart	var d'écart

Exercice 01 :

$$(P)\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7 \\ 2x_1 + x_2 \leq 9 \quad x_1, x_2 \geq 0 \\ \text{Max } Z : 3x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

1	1	7	
2	1	9	
1	2	3	
1	1	2	
7	9		

Tableau optimal de (P)

	x_1	x_2	e_1	e_2	b
x_2	0	1	2	-1	5
x_1	1	0	-1	1	2
Z_{max}	0	0	-1	-1	-16

- Donner le vecteur de solution optimale de (P)
- Déterminer le dual puis constater la solution optimale de (D)

=> Solution :

1 – $X(\overset{x_1}{2}, \overset{x_2}{5}, \overset{e_1}{0}, \overset{e_2}{0})$

2 –

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ y_1 + y_2 \geq 2 \qquad y_1, y_2 \geq 0 \\ 7y_1 + 9y_2 = \omega \min \end{cases}$$

$\omega^* = 16$

$$\begin{cases} y_1 \to e_1 \\ y_2 \to e_2 \\ u_1 \to x_1 \\ u_2 \to x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 \to 1 \\ y_2 \to 1 \\ u_1 \to 0 \\ u_2 \to 0 \end{cases}$$

$y(1, 1, 0, 0)$