Optimisation discrète, Séance 5 : Exercices corrigés
PROGRAMMATION LINÉAIRE

Objectifs

Optimisation linéaire sous contraintes linéaires. Aspects algébriques et géométriques. Algorithme du simplexe. Solutions entières.

Certains résultats (cités pour la continuité de l'exposé) n'ont pas à être démontrés.

Etude d'un exemple

Méthode géométrique

Quest 1 • On a là un problème d'optimisation (linéaire)sous contraintes (linéaires) :

$$\begin{aligned} \max \Phi(x_1, x_2) &= 8x_1 + 6x_2 \\ 5x_1 + 3x_2 &\leq 30 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 24 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 18 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dans ce cas particulier simple, on peut voir le résultat géométriquement (faire un dessin).

Déf 1 ∘ On introduit des variables d'écart (y_1, y_2, y_3) :

$$\begin{array}{ccccccccccl} 5x_1 & + & 3x_2 & + & y_1 & & & & & = & 30 \quad (C1) \\ 2x_1 & + & 3x_2 & & & + & y_2 & & & = & 24 \quad (C2) \\ x_1 & + & 3x_2 & & & & & + & y_3 & = & 18 \quad (C3) \end{array}$$

Quest 2 • On représente un point du domaine admissible au moyen de 5 composantes $(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3)$.

Le nombre maximal de sommets (convenables ou non) est : $\binom{5}{3}$= $C_5^3 = 10$ ·
Ces sommets peuvent être caractérisés par 3 des 5 composantes (les 2 autres étant nulles).

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
O(0,0) :	0	0	30	24	18
M(6,0) :	6	0	0	12	12
N(0,6) :	0	6	12	6	0
P(3,5) :	3	5	0	3	0

Déf 2 ∘ Base en un point : ensemble des composantes non nulles.

Déf 3 ∘ Forme canonique (en fonction des variables hors-base) de Φ en O : expression de Φ.

$$\Phi(0,0,30,24,18) = 0 + 8x_1 + 6x_2$$

Car le point O est une solution (non optimale !) du système linéaire.

Quest 3 • Si on chemine le long de OM, on arrive en M avec la valeur, tirée de (C1) :

$$x_1 = 6 - \frac{3}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_1$$

qu'on reporte :
- dans (C2) $\Longrightarrow$ $y_2 = 12 - \frac{9}{5}x_2 + \frac{2}{5}y_1$
- dans (C3) $\Longrightarrow$ $y_3 = 12 - \frac{12}{5}x_2 + \frac{1}{5}y_1$

d'où :

$$\Phi(6,0,0,12,12) = 48 + \frac{6}{5}x_2 - \frac{8}{5}y_1$$

Quest 4 • Le long de ON (c'est alors y_3 qui tend vers zéro) on obtient :

$$\Phi(0,6,12,12,0) = 36 + 6x_1 - 2y_3$$

Le trajet OM est donc localement le meilleur (ce qui était prévisible).

Quest 5 • On peut maintenant continuer à partir de M et augmenter Φ par accroissement de x_2. C'est y_3 qui diminue, jusqu'en P où il est nul et (C3) donne :

$$x_2 = 5 + \frac{1}{12}y_1 - \frac{5}{12}y_3$$

qu'on reporte
- dans (C1) $\Longrightarrow$ $x_1 = 3 - \frac{1}{4}y_1 + \frac{1}{4}y_3$
- dans (C2) $\Longrightarrow$ $y_2 = 3 + \frac{1}{4}y_1 - \frac{1}{3}y_3$

et par conséquent

$$\Phi(3,5,0,3,0) = 54 - \frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_3$$

où on reconnaît l'optimum : y_1 ou y_3 ne pouvant être augmentée.

Méthode des Tableaux

Déf 4 ∘ Tableau du Simplexe : on ajoute au système des contraintes une ligne suppémentaire (coefficients de la fonction objectif et sa valeur initiale).

5	3	1	0	0	30
2	2	0	1	0	24
1	3	0	0	1	18
-8	-6	0	0	0	**0**

On observe alors que tous les résultats (de la Fig. 1) peuvent être obtenus sur le Tableau à l'aide de combinaisons linéaires de lignes.

FIG. 1 – Itérations par Tableau

```
|   5    3    1    0    0        30  |
|   2    2    0    1    0        24  |
|   1    3    0    0    1        18  |
|  -8   -6    0    0    0         0  |

|   1   3/5  1/5   0    0         6  |
|   0   9/5 -2/5   1    0        12  |
|   0  12/5 -1/5   0    1        12  |
|   0  -6/5  8/5   0    0        48  |

|   1    0   1/4   0  -1/4        3  |
|   0    0  -1/4   1  -3/4        3  |
|   0    1  -1/12  0   5/12       5  |
|   0    0   3/2   0   1/2       54  |
```

Inéquations linéaires

Déf 5 ∘ Forme standard du système des contraintes (avec des égalités)

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{p1} & C_{p2} & \cdots & C_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \vdots \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_p \end{pmatrix}$$

Aspects algébriques

On s'arrange pour que les colonnes de base soient regroupées à droite de la matrice C :

1 m	m+1 m+p=n
x(1 :m) variables hors-base	x(m+1 :m+p) variables de base

Notation des composantes du changement de base :

r	= indice	$(1 \leq r \leq m)$	de la composante qui entre
s	= indice	$(m+1 \leq m+s \leq m+p)$	de celle qui sort

L'entier s est donc l'indice, dans B regroupée à droite, de la colonne sortante.
La solution de base d'une forme canonique est donc : `x(m+1 :m+p) = d`.

Thm 1 . [Farkas-Minkowski] On a l'alternative suivante :
– ou bien le système des contraintes ($Cx = d$) admet une solution réalisable,
– ou bien on peut trouver un vecteur u tel que :

$$\begin{array}{rcl} C^*u & \geq & 0 \\ (d|u) & < & 0 \end{array}$$

Thm 2 . [fondamental] S'il existe une solution réalisable au système des contraintes, alors il existe une solution réalisable de base.

Dans le système
$$x_1C_1 + \cdots + x_mC_m = d$$
supposons que k composantes de x (les premières pour la commodité d'écriture) soient positives, i.e. non nulles.

Si les colonnes $(C_1, \ldots, C_k)$ correspondantes sont indépendantes, le résultat est démontré puisqu'alors $k \leq p$ (la solution étant éventuellement dégénérée).

Sinon, cela signifie qu'on peut écrire
$$u_1C_1 + \cdots + u_kC_k = 0$$
et donc
$$(x_1 - \theta u_1)C_1 + \cdots + (x_k - \theta u_k)C_k = d$$

Cette nouvelle solution $(x - \theta u)$ est réalisable pour $\theta = 0$. Si on augmente θ jusqu'à annuler une composante (de numéro i) correspondant à $u_i > 0$, il ne reste alors plus que $k-1$ composantes > 0, et on recommence si c'est nécessaire (jusqu'à $k \leq p$).

Aspects géométriques

L'ensemble des solutions réalisables du système des contraintes standard constitue un polyèdre convexe (polyèdre des contraintes).

Thm 3 . [Théorème d'équivalence] Soit Ω le polyèdre des contraintes. Alors :

$$x \text{ solution réalisable de base } \Leftrightarrow x \text{ point extrémal de } \Omega$$

Condition $\Leftarrow$

Soit, en effet, x réalisable de base, alors (tant pis pour la numérotation)
$$x_1C_1 + \cdots + x_pC_p = d$$

Supposons que :
$$x = \lambda u + (1 - \lambda)v \qquad 0 < \lambda < 1$$
Comme on a
$$u \geq 0 \quad \& \quad v \geq 0$$
on voit que u et v n'ont, eux aussi, que p composantes non nulles.

Leur appartenance à Ω s'écrit donc
$$\begin{aligned} u_1C_1 + \cdots + u_pC_p &= d \\ v_1C_1 + \cdots + v_pC_p &= d \end{aligned}$$

et donc $u = v$ (les C_i formant une base).

Condition $\Rightarrow$

Soit x un point extrémal ayant k composantes > 0. Il faut montrer que les colonnes correspondantes sont indépendantes (car alors $k \leq p$).

Par l'absurde : s'il existe des w_i tels que

$$w_1 C_1 + \cdots + w_k C_k = 0$$

on peut choisir θ de sorte que

$$x + \theta w \geq 0 \quad \text{et} \quad x - \theta w \geq 0$$

soient réalisables de base, donc dans Ω. Mais alors

$$x = \frac{1}{2}(x + \theta w) + \frac{1}{2}(x - \theta w)$$

ne serait plus extrémal (en tant que combinaison linéaire de deux points de Ω).

Thm 4 . Soit à maximiser $\Phi = (a \mid x)$ sur le polyèdre des contraintes. Alors l'optimum est atteint en un (au moins un) point extrémal.

Il suffit, pour le voir, d'utiliser le théorème de Krein-Milman (tout point de K est combinaison convexe des ses points extrémaux).

Soient $S1, \ldots, Sq$ les sommets extrémaux. Pour tout x de K, on a :

$$x = \xi_1 S_1 + \cdots + \xi_q S_q$$

Donc

$$(a \mid x) = \xi_1 (a \mid S_1) + \cdots + \xi_q (a \mid S_q)$$

Soit Φ_* la plus grande valeur (atteinte en S_i), on a :

$$(a \mid x) \leq \Sigma \xi_j (a \mid S_j) \leq \Sigma \xi_j (a \mid S_i) = \Phi_*$$

qui montre que la fonction objectif ne peut dépasser cette valeur.

Méthode du Simplexe

Algorithme du Simplexe

On suppose ici que C contient une matrice de base, normalisée à I, dans ses p colonnes de droite.

Le second membre exprime donc la solution de base : d (variables de base) et valeur de Φ.

Quest 6 • Le changement de base (défini ci-dessus) signifie donc le passage de B à B' par remplacement d'une colonne de B (en numéro s dans B, pour fixer les notations) par une colonne v de H (en numéro r).

Expression théorique

Soit $B_1, \ldots, B_p$ la base des colonnes courante. On a :

$$\begin{aligned} d &= x_1 B_1 + \cdots + x_p B_p \\ \vec{C}_j &= C_{1j} B_1 + \cdots + C_{pj} B_p \end{aligned}$$

En particulier, pour $j = r$, on a :

$$\vec{C}_r = C_{sr}B_s + \Sigma_{i\neq s}C_{ir}B_r$$

d'où B_s, qu'on reporte dans $\vec{C}_j$:

$$\vec{C}_j = \frac{C_{sj}}{C_{sr}}\vec{C}_r + \Sigma_{i\neq s}\left(C_{ij} - \frac{C_{ir}}{C_{sr}}C_{sj}\right)B_i$$

soit :

$$C_{sj} = \frac{C_{sj}}{C_{sr}} \qquad \text{et} \qquad C_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{ir}}{C_{sr}}C_{sj}$$

Dans la méthode des Tableaux, le changement de base n'est rien d'autre qu'une étape de Gauss-Jordan.

Quest 7 • Un critère raisonnable d'entrée en base est :

$$r = \text{argmin}\, \mathtt{C}(\mathtt{p}+\mathtt{1}, \mathtt{1}:\mathtt{m}) \quad \text{sur les composantes } C_{p+1,j} < 0$$

Quest 8 • Le critère de sortie de la base est nécessairement :

$$s = \text{argmin}\, \frac{\mathtt{d}(\mathtt{1}:\mathtt{p})}{\mathtt{C}(\mathtt{1}:\mathtt{p},\mathtt{r})} \quad \text{sur les composantes } C_{ir} > 0$$

On a (par définition)

$$\begin{aligned} \vec{C}_r &= C_{1r}e_1 + \cdots + C_{pr}e_p \\ d &= y_1e_1 + \cdots + y_pe_p \end{aligned}$$

d'où

$$(y_1 - \theta C_{1r})e_1 + \cdots + (y_p - \theta C_{pr})e_p + \theta B_r = d$$

Pour $\theta > 0$ (et, disons, petit) la nouvelle solution est réalisable en général mais pas de base. On prend donc

$$\theta = \min_{i=1:p}\left(\frac{y_i}{C_{ir}} \;/\; C_{ir} > 0\right)$$

et on note s l'indice ainsi déterminé. Donc :

$$\frac{D_s}{C_{sr}} = \min_{i=1:p}\left(\frac{Di}{C_{ir}} \;/\; C_{ir} > 0\right)$$

Quest 9 • Le premier critère est également un critère de terminaison, car si `C(p,1 :m)` ≥ 0 alors l'optimum est atteint.

Quest 10 • Le second critère fait apparaître quelques cas particuliers :

- D'une part si $\mathtt{C}(\mathtt{1}:\mathtt{p},\mathtt{r}) \leq 0$, alors la démonstration de la formule du changement de base montre que l'accroissement θ de la variable qui entre peut être pris aussi grand qu'on veut, la solution restant réalisable : optimum non borné.
- D'autre part si $D_s = 0$ (la fonction objectif n'augmente pas) il y a dégénérescence et, du moins théoriquement, risque de cyclage.

Démarrage de l'algorithme

Quest 11 • On reprend l'exemple d'introduction avec la nouvelle fonction objectif : $\Phi = 11x_1 + 6x_2$.

On constate que x_2 disparaît de la base à l'optimum $(x_1, *, *, y_2, y_3)$.

```
|   1   6/5  1/5   0    0         6  |
|   0   9/5 -2/5   1    0        12  |
|   0  12/5 -1/5   0    1        12  |

|   0   6/5 11/5   0    0        66  |
```

Quest 12 • Pourrésoudre avec la contrainte supplémentaire : $x_2 \geq 1$, on ajoute une ligne :

$$x_2 - y_4 = 1$$

```
|   5    3    0    1    0    0         30  |
|   2    3    0    0    1    0         24  |
|   1    3    0    0    0    1         18  |
|   0    1   -1    0    0    0          1  | <<

| -11   -6    0    0    0    0          0  |
```

Et . . . on ne peut plus démarrer avec $0, 0, y_4, y_1, y_2, y_3$.

Déf 6 ◦ Variable artificielle

$$x_2 - y_4 + z_1 = 1$$

Quest 13 • Résolution par la méthode des deux phases.

> On procède comme d'habitude (après avoir ajouté une ligne, $p+2$, de minimisation de σ), mais le premier critère doit être subdivisé pour tester la fin de la phase zéro d'élimination des variables artificielles.

Exemple Fig. 2.

Quest 14 • Si, à l'optimum de la phase zéro d'élimination des variables artificielles, on a :

$$D_{p+2} = 0$$

alors on supprime la ligne $p + 2$ et on continue, sinon c'est que le convexe est vide.

Organisation des données

L'utilisation d'un vecteur `index` rend inutile le stockage des colonnes de base : Fig. 3.

FIG. 2 – Méthode des deux phases

```
|   5    3    0    1    0    0        30  | y1
|   2    3    0    0    1    0        24  | y2
|   1    3    0    0    0    1        18  | y3
|   0    1   -1    0    0    0         1  | z1
| -11   -6    0    0    0    0         0  | Phi
|   0   -1    1    0    0    0         0  | Sigma

|   5    0    3    1    0    0        27  | y1
|   2    0    3    0    1    0        21  | y2
|   1    0    3    0    0    1        15  | y3
|   0    1   -1    0    0    0         1  | x2
| -11    0   -6    0    0    0         6  | Phi
|   0    0    0    0    0    0         0  | Sigma

|   1    0   3/5  1/5   0    0       27/5 | x1
|   0    0   9/5 -2/5   1    0       51/5 | y2
|   0    0  12/5 -1/5   0    1       48/5 | y3
|   0    1   -1    0    0    0         1  | x2
|   0    0   3/5 11/5   0    0      327/5 | Phi
```

Programmation linéaire et dualité

Dualité

Primal (P)			Dual (D)		
Cx	$\leq$	d	C^*u	$\geq$	a
x	$\geq$	0	u	$\geq$	0
$\max \Phi$	$=$	$(a\|x)$	$\min \pi$	$=$	$(u\|d)$

Quest 15 • Pour l'exemple d'introduction, le dual s'écrit :

$$\begin{array}{rlcl} \min \pi = & 30u_1 + 24u_2 + 18u_3 & & \\ & 5u_1 + 2u_2 + u_3 & \geq & 8 \\ & 3u_1 + 3u_2 + 3u_3 & \geq & 6 \\ & u_1, u_2, u_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Il exprime le même problème mais du point de vue d'un client qui voudrait acheter la totalité des matières premières, les contraintes représentant les conditions du fabricant.

Quest 16 • On trouve, en résolvant par tableaux, que l'optimum (qui a la même valeur que dans (P), c'est un résultat général) correspond à :

$$-\pi(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, 0) + 3u_2 + 3v_1 + 5v_2 = -54$$

où apparaît la signification des variables duales.

FIG. 3 – Vecteur `index`

```
         1         2        3
+---------+--------+-------+----------+--
|   5.000    3.000   0.000 |   30.000 | 4
|   2.000    3.000   0.000 |   24.000 | 5
|   1.000    3.000   0.000 |   18.000 | 6
|   0.000    1.000  -1.000 |    1.000 | 7
| -11.000   -6.000   0.000 |    0.000 | Phi
|   0.000   -1.000   1.000 |   -1.000 | Sigma

         1         7        3
+---------+--------+-------+----------+--
|   5.000   -3.000   3.000 |   27.000 | 4
|   2.000   -3.000   3.000 |   21.000 | 5
|   1.000   -3.000   3.000 |   15.000 | 6
|   0.000    1.000  -1.000 |    1.000 | 2
| -11.000    6.000  -6.000 |    6.000 | Phi
|   0.000    1.000   0.000 |    0.000 | Sigma

         4        3
+---------+--------+---------+--
|   0.200   0.600  |   5.400 | 1
|  -0.400   1.800  |  10.200 | 5
|  -0.200   2.400  |   9.600 | 6
|   0.000  -1.000  |   1.000 | 2
|   2.200   0.600  |  65.400 | Phi
```

$$\boxed{\begin{array}{lcccc} \phi(3,5,0,3,0) & + & \frac{3}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_3 & = & 54 \\ 3v_1 + 5v_2 + 3u_2 & - & \pi(\frac{3}{2},0,\frac{1}{2},0,0) & = & \text{-54} \end{array}}$$

On voit également ainsi que les deux problèmes sont (réciproquement) duals l'un de l'autre.
Il y a une autre observation à faire sur ces résultats (principe de complémentarité à l'optimum) :
- $y_2 \neq 0 \Longrightarrow u_2 = 0$
- $u_1 \neq 0 \quad \& \quad u_3 \neq 0 \Longrightarrow y_1 = 0 = y_3$

Quest 17 • **[R1]** Soient x et u deux solutions réalisables, respectivement de (P) et (D). On a :

$$\Phi(x) \leq \pi(u)$$

En effet

$$Cx = d \Longrightarrow (u|Cx) = (u|d)$$

$$C^*u \geq a \Longrightarrow (C^*u|x) \geq (a|x)$$

car $x \geq 0$.

Quest 18 • Si l'un des deux admet un optimum non borné ($+\infty$ pour Φ, $-\infty$ pour π), alors l'autre n'admet pas de solution réalisable.

La réciproque n'étant pas vraie, car s'il n'y pas de vecteurs réalisant l'optimum (dans l'un ou l'autre) :

– ou bien les deux n'ont pas de solution,
– ou bien l'un est vide et l'autre non borné.

Thm 5 . Les solutions réalisables x et u sont optimales si et seulement si :

$$(C^*u - a|x) = 0$$

et si et seulement si

$$(u|Cx - d) = 0$$

C'est encore le principe de complémentarité à l'optimum :

– Contrainte primale saturée $\Longrightarrow$ variable duale nulle (hors base),
– Variable primale de base $\Longrightarrow$ contrainte duale saturée.

Pour ($\Longleftarrow$), on remarque que

$$(a|x) = (u|Cx) = (u|d)$$

i.e.

$$\Phi(x) = \pi(u)$$

c'est donc l'optimum, conséquence de **[R1]**.

Pour ($\Longrightarrow$), on note qu'à l'optimum

$$(u|d) = (bB^{-1}|d) = (b|y) = (a|x)$$

(car $x = 0$) d'où la relation ci-dessus (car $d = Cx$).

Algo 1 . Algorithme dual.

On reprend la variante de l'exemple d'introduction correspondant à : $\Phi = 11x_1 + 6x_2$.
On trouve, à l'optimum

```
|  1/5   3/5   6  |
| -2/5   9/5  12  |
| -1/5  12/5  12  |

| 11/5   3/5  66  |
```

avec les indices $(3, 2; 1, 4, 5)$.
Si on ajoute maintenant la contrainte $x_2 \geq 1$, il vient :

```
|  1/5   3/5   6  |
| -2/5   9/5  12  |
| -1/5  12/5  12  |
|   0     -1   -1  |

| 11/5   3/5  66  |
```

avec les indices $(3, 2, ; 1, 4, 5, 6)$.
On est en présence d'une solution non réalisable dans le primal (c'est pour cela qu'on avait précédemment introduit une variable artificielle).
Mais si on considère ce tableau comme celui du problème dual (le transposer par la pensée), il fait apparaître une solution duale réalisable $(\frac{11}{5}, \frac{3}{5})$ et une possibilité d'amélioration (par le -1 du second membre).
Noter au passage que cet algorithme dual prend les critères en ordre inverse. Le changement de base donne alors

```
|  1/5   3/5   27/5  |
| -2/5   9/5   51/5  |
| -1/5  12/5   48/5  |
|  0     -1     1    |

| 11/5   3/5  327/5  |
```

avec les indices $(3, 6; 1, 4, 5, 2)$.
Cette solution est optimum (mais c'est évidemment un hasard qu'une seule itération ait suffi).

Programmation en nombres entiers

Quest 19 • Que penser de la troncature d'une solution obtenue en "continu" ?

Pour obtenir une solution en nombres entiers, on commence par résoudre en continu.
Si les valeurs obtenues sont (relativement) grandes, la troncature est, sauf cas d'espèce, une bonne approximation en pratique.
Sinon, à moins d'énumérer toutes les possibilités, on retrécit le polyèdre des contraintes (en faisant des coupes représentant des contraintes supplémentaires) pour se ramener à un problème à solution entière.

Quest 20 • Montrer que la condition d'intégralité se traduit par une contrainte supplémentaire.

Soit, à l'optimum continu, la variable de base

$$y_i = d_i - \sum C_{ij} x_j$$

exprimée en fonction des x_j (hors-base, donc nuls).
Si on exhibe les parties entières

$$\begin{aligned} d_i &= [d_i] + \delta_i \\ C_{ij} &= [C_{ij}] + \gamma_{ij} \end{aligned}$$

cela s'écrit

$$y_i - [d_i] + \sum [C_{ij}] x_j = \delta_i - \sum \gamma_{ij} x_j$$

Si l'expression de gauche doit être entière, il en est de même de celle de droite. Mais celle-ci, $\leq \delta_i$, est donc < 1, c'est-à-dire ≤ 0. C'est la contrainte supplémentaire cherchée.

Exemple : Fig. 4 (les indices ont changé parce qu'on a omis la variable artificielle).

FIG. 4 – Solutions entières

```
        3       6
|   0.200   0.600  |   5.400 | 1
|  -0.400   1.800  |  10.200 | 4
|  -0.200   2.400  |   9.600 | 5
|   0.000  -1.000  |   1.000 | 2
|   2.200   0.600  |  65.400 |

        3       6
|   0.200   0.600  |   5.400 | 1
|  -0.400   1.800  |  10.200 | 4
|  -0.200   2.400  |   9.600 | 5
|   0.000  -1.000  |   1.000 | 2
|  -0.200  -0.600  |  -0.400 | 7   (Coupe sur 1)
|   2.200   0.600  |  65.400 |

        3       7
|   0.000   1.000  |   5.000 | 1
|  -1.000   3.000  |   9.000 | 4
|  -1.000   4.000  |   8.000 | 5
|   0.333  -1.667  |   1.667 | 2
|   0.333  -1.667  |   0.667 | 6
|   2.000   1.000  |  65.000 |

        3       7
|   0.000   1.000  |   5.000 | 1
|  -1.000   3.000  |   9.000 | 4
|  -1.000   4.000  |   8.000 | 5
|   0.333  -1.667  |   1.667 | 2
|   0.333  -1.667  |   0.667 | 6
|  -0.333   1.667  |  -0.667 | 8  (Coupe sur 2)
|   2.000   1.000  |  65.000 |

        8       7
|   0.000   1.000  |   5.000 | 1
|  -3.000  -2.000  |  11.000 | 4
|  -3.000  -1.000  |  10.000 | 5
|   1.000  -0.000  |   1.000 | 2
|   1.000  -0.000  |   0.000 | 6
|  -3.000  -5.000  |   2.000 | 3
|   6.000  11.000  |  61.000 |
```