Module: Programmation linéaire
Filière \ Année : 3SI \ 2021-2022
Chargée cours: Mme Aliouat
Durée : 1h 30

Examen

Exercice 01 (10 pts)

A. Est-il possible d'utiliser la méthode de simplexe pour résoudre les programmes linéaires suivants. justifier

PL1
$$\begin{array}{llrrrrrr} \text{Maximiser} & -3x_1 & +2x_2 & -2x_3 & -x_4 & & \\ \text{Sous} & 4x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 & \leq & -2 \\ & -x_1 & & -x_3 & & \leq & -10 \\ & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & & \geq & 0 \end{array}$$

PL2
$$\begin{array}{lrcrcr} \text{Maximiser} & 7x_1 & + & x_2 & & \\ \text{Sous} & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 4 \\ & -5x_1 & - & 2x_2 & \geq & 3 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

PL3
$$\begin{array}{lrcrcrcrcr} \text{Maximiser} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 4x_4 & & \\ \text{Sous} & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & \leq & 5 \\ & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & \leq & 3 \\ & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

PL4
$$\begin{array}{lrrl} \text{Maximiser} & 2x_1 & +x_2 & \\ \text{Sous} & 2x_1 & -x_2 & \leq 5 \\ & 2x_1 & -3x_2 & \geq -8 \\ & x_1, x_2 & & \geq 0 \end{array}$$

B. soit un tableau d'une itération de simplexe d'un programme linéaire (P)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	0	2	-1	0	60
x_2	0	1	-1/2	1/2	0	25
x_5	0	0	-3/2	1/2	1	15
Zmax	0	0	-2	-2	0	-540

1. Ce tableau est il optimal ;
2. Donner le vecteur $X(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de la solution optimale
3. Déterminer l'écriture SFC%B $_{(1,2,5)}$ du programme linéaire (P)

c. Prouver à la main que (P1) est non réalisable et que (P2) est un Problème à solutions multiples

P1
$$\begin{array}{ll} Min & 3x_1 + 2x_2 \\ s.c. & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 + 4x_2 \geq 8 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

P2
$$\begin{array}{ll} Max & x_1 + 3x_2 \\ s.c. & 2x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ & x_1 \leq 10 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Exercice 2 (10 pts)

Un fleuriste dispose de 50 lys, 80 roses et 80 jonquilles. Il réalise ou bien des bouquets qu'il vend 40 euros comprenant 10 lys, 10 roses et 20 jonquilles, ou bien des bouquets dont il tire un prix de 50 euros qui comprennent 10 lys, 20 roses et 10 jonquilles. Comment le fleuriste doit il former les bouquets pour réaliser une recette maximale ?

1-Modéliser le problème par un PL puis Résoudre le PL par le simplex

2- Quelle est la recette maximale ?

Corrigé type Examen PL 2022

Exo 1

A) justification

PL_1 $\begin{cases} \text{Max } -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 \\ \text{Sous } 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + e_1 = -2 \\ -x_1 - x_3 + e_2 = -10 \\ x_{1,2,3,4},\ e_1, e_2 \geq 0 \end{cases}$ 0,25

les valeur $b_i \leq 0 \Rightarrow$
on peut pas trouver une base B t.q PL_1 SFC % B 0,25
alors Simplex n'est pas possible pour PL_1 0,1
$\Rightarrow$ Méthode deux phase.

PL_2 $\begin{cases} \text{Max } z = 7x_1 + x_2 \\ 4x_1 + 3x_2 + e_1 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + e_2 = 4 \\ -5x_1 - 2x_2 - e_3 = 3 \end{cases}$ 0,25

on peut pas trouver une base initiale B t.q PL_2 SFC % B 0,25
$\Rightarrow$ Simplex n'est pas possible 0,1
$\Rightarrow$ Méthode de deux phase

$PL_3 =$ $\begin{cases} \text{Max } z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + e_1 = 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + e_2 = 3 \\ x_{1,2,3,4},\ e_1, e_2 \geq 0 \end{cases}$ 0,25

$B(5,6) = A_B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C_B = (0,0)$ 0,25
$\Rightarrow PL_3$ est SFC % $B(5,6)$ 0,25
$\Rightarrow$ simplex possible.

PL_4 $\begin{cases} \text{Max } z : 2x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2 + e_1 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 - e_2 = -8 \end{cases}$ 0,25

$\begin{cases} 2x_1 + x_2 : \text{Max } z \\ 2x_1 - x_2 + e_1 = 5 \\ -2x_1 + 3x_2 + e_2 = 8 \end{cases}$

$B(3,4)$: $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$C_B = (0,0)$ 0,25
alors PL_4 est SFC % $B(3,4)$
$\Rightarrow$ simplex possible 0,25

B) 0,1
* Oui Tableau optimale car coef $z \leq 0$ 0,1
* $X(60, 25, 0, 0, 15)$
* l'écriture SFC % $B(1,2,5)$

$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 60 \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 25 \\ -\frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + x_5 = 15 \\ z\max : -2x_3 - 2x_4 - 540. \end{cases}$ 2

C)

(P1) est non realisable car il y a contradiction entre deux contraintes

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 8 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \end{cases}$ contradi 1

(P2) problème à solutions multiples
la droite de la fonction z
$x_1 + 3x_2$ est parallèle à la droite de la contrainte $2x_1 + 6x_2 \leq 30$ 1
car il ont m pent.
~~$2x_1 + 6x_2$~~ $x_2 = \boxed{\frac{-1}{3}} x_1$

Exo2

Modelisation.

var de decision

x_1 : nbr de bouquets type 1 (1)

x_2 : " " " 2

contraintes

$$\begin{cases} 10x_1 + 10x_2 \leq 50 \rightarrow \text{lys} \\ 10x_1 + 20x_2 \leq 80 \rightarrow \text{roses} \\ 20x_1 + 10x_2 \leq 80 \rightarrow \text{jonquilles} \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(1) (1) (1) (0,1)

$Max\ Z : 40x_1 + 50x_2$ (1)

$$PL \begin{cases} 10x_1 + 10x_2 + e_1 = 50 \\ 10x_1 + 20x_2 + e_2 = 80 \\ 20x_1 + 10x_2 + e_3 = 80 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \\ Max\ Z : 40x_1 + 50x_2 \end{cases}$$

resolution Simplex (0,1)

$B(3,4,5)$ $A_B\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C_B(0,0,0)$

alors PL est SFC % B(3,4,5) ⇒ simplex

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	B
e_1	10	10	1	0	0	50
e_2	10	20	0	1	0	80
e_3	20	10	0	0	1	80
z	40	50	0	0	0	0

cp

(1)

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b
e_1	5	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	10
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{20}$	0	4
e_3	15	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	40
z	15	0	0	$-\frac{5}{2}$	0	-200

(1,25)

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b
x_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	0	2
x_2	0	1	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	3
e_3	0	0	-3	1	1	10
z	0	0	-3	$-\frac{5}{10}$	0	-230

$Z_{max} = 230$

⇒ recette maximale = 230 euros

(1,25) (0,5)