- Exercices de TD -

1 Modélisation.

- Exercice 1 - Piles. Une manufacture de piles désire ajouter deux nouveaux produits à son catalogue : la Everlast III et la Xeros dry-cell. La Everlast III contient 2g de Cadmium et 4g de Nickel, alors que la Xeros nécessite 3g de Nickel et 4g de Zinc en poudre. La quantité totale de Cadmium disponible sur le marché est de une tonne, celle de Nickel est de trois tonnes. Le Zinc est en quantité illimitée et sa pulvérisation une formalité. La production de 1000 Everlast III demande 2 heures sur une Presse Glunt II et celle de 1000 Xeros dry-cells demande 3 heures. La presse est disponible 2400 heures cette année. La compagnie escompte un bénéfice net de 1000 euros par millier d'Everlast et de 1200 euros par millier de Xeros.

a. Traduire par un programme linéaire en forme canonique.
b. Résoudre le problème par une méthode graphique.
c. Maximiser le gain de l'année par la méthode du simplexe. Effectuer tous les choix possibles de variable entrante lors du premier pivot.
d. Repérer sur le graphique l'évolution des variables de décision à chaque pivot du simplexe.
e. Une étude écologique montre la nocivité élevée de la Xeros et force la compagnie à augmenter la publicité de ce produit. Le bénéfice net de la Xeros s'en ressent et passe alors à 750 euros par millier de Xeros. Recalculer une solution optimale.

- Exercice 2 - Nutritionniste. Un nutritionniste est chargé d'élaborer un régime alimentaire à partir des aliments suivants : Oeufs, Lait, Fromage et Pain. Les compositions (en mg) de ces différent produits en Cadmium, Nickel et Zinc sont respectivement de : Oeufs : 6,2,1. Lait : 8,1,3. Fromage : 5,1,1. Pain : 9,3,2. Une étude récente ayant démontré la nocivité aigüe du Nickel et du Zinc, on estime que la consommation journalière ne doit en aucun cas dépasser 15mg pour le Nickel et 10mg pour le Zinc. L'étude pointe en revanche que le Cadmium est un oligo-élément notoirement bénéfique.

a. Utiliser la méthode du simplexe afin de calculer un régime alimentaire le plus riche en Cadmium possible.
b. Montrer l'unicité de la solution trouvée.
c. Une erreur s'est glissée dans le rapport et fait que les rôles du Zinc et du Cadmium ont été échangés (le Cadmium étant en effet extrêmement toxique). On estime de plus que dans tout régime doit figurer au moins une unité de pain et au plus trois oeufs. Recalculer une solution optimale.

- Exercice 3 - Bucheron. Un bucheron a 100 hectares de bois de feuillus. Couper un hectare de bois et laisser la zone se régénérer naturellement coûte 10 k€ par hectare, et rapporte à terme 50 k€ . Alternativement, couper un hectare de bois, et replanter avec des pins coûte 50 k€ par hectare, et rapporte à terme 120 k€ . Sachant que le bucheron n'a que 4000 k€ en caisse au début de l'opération, déterminer la meilleure stratégie à adopter et le profit escomptable.

- Exercice 4 - Cambrioleur. Un cambrioleur disposant d'un sac à dos d'une capacité de 60 litres est confronté au douloureux problème de sélectionner des objets à dérober parmi sept disponibles. Les volumes (en litres) et prix respectifs à la revente des différents objets sont donnés par le tableau suivant :

	objet 1	objet 2	objet 3	objet 4	objet 5	objet 6	objet 7
volume	20	16	7	10	42	4	12
prix	25	18	10	12	50	5	14

a. Résoudre le problème "à la main". Essayer de certifier l'optimalité de votre solution.

b. Modéliser le problème sous forme d'un programme linéaire en nombres entiers.

c. Résoudre la relaxation linéaire de ce problème en utilisant un algorithme glouton.

d. Résoudre la relaxation linéaire de ce problème en utilisant l'algorithme du simplexe du TP1.

- Exercice 5 - Taxis. Une compagnie de taxi dispose de quatre véhicules libres et doit transporter quatre clients. Le but de la compagnie est d'assigner un taxi par client en minimisant la somme des distances parcourues. Les distances respectives (en kilomètres) entre les taxis et les voyageurs sont données par le tableau suivant :

distance	client 1	client 2	client 3	client 4
taxi 1	6	3	4	5
taxi 2	4	5	4	6
taxi 3	5	6	6	7
taxi 4	4	4	3	5

a. Résoudre le problème "à la main". Essayer de certifier l'optimalité de votre solution.

b. Modéliser le problème sous forme d'un programme linéaire sous forme canonique.

c. Résoudre en utilisant le solveur du TP3.

d. Justifier à présent l'optimalité de la solution.

- Exercice 6 - Cartons. Une entreprise disposant de 10 000 m^2 de carton en réserve, fabrique et commercialise 2 types de boîtes en carton. La fabrication d'une boîte en carton de type 1 ou 2 requiert, respectivement, 1 et 2 m^2 de carton ainsi que 2 et 3 minutes de temps d'assemblage. Seules 200 heures de travail sont disponibles pendant la semaine à venir. Les boîtes sont agrafées et il faut quatre fois plus d'agrafes pour une boîte du second type que pour une du premier. Le stock d'agrafes disponible permet d'assembler au maximum 15 000 boîtes du premier type. Les boîtes sont vendues, respectivement, 3 € et 5 € .

a. Formuler le problème de la recherche d'un plan de production maximisant le chiffre d'affaires de l'entreprise sous forme d'un programme linéaire canonique.

b. Déterminer un plan de production optimal en résolvant graphiquement le programme linéaire trouvé en a.

- Exercice 7 - Jeu de Morra. Ce jeu oppose deux joueurs A et B. A chaque tour chacun des joueurs cache une ou deux pièces, puis essaie de deviner à haute voix le nombre de pièces cachées par l'autre. Si à l'issue du tour, un seul des joueurs a deviné juste, il reçoit de l'autre autant de pièces que les deux ont cachés au total. Dans les autres cas, la partie est nulle. Par exemple :

– Si A cache 1 et annonce 2 et que B cache 2 et annonce 1, la partie est nulle.

– Si A cache 1 et annonce 2 et que B cache 2 et annonce 2, alors B donne 3 pièces à A.

Le but de cet exercice est la recherche d'une stratégie mixte optimale pour le jeu de Morra.

a. Ecrire la matrice de ce jeu.
b. Modéliser le problème sous forme d'un programme linéaire.
c. Le résoudre.

- Exercice 8 - Jambons. [Adapté de Greene *et al.* (1959)] Une usine d'emballage de viande produit 480 unités de jambons, 400 unités de poitrines de porcs et 230 unités de lardons chaque jour. Chacun de ces produits peut être vendu frais ou fumé. Le nombre total d'unités de produits pouvant être fumées au cours d'une journée normale de travail est de 420. De plus, 250 unités de produits supplémentaires peuvent être fumées au cours d'heures supplémentaires pour un coût plus élevé. Les bénéfices net par unité produite sont les suivants :

	Frais	Fumé en heures normales	Fumé en heures supplémentaires
Jambons	8 €	14 €	11 €
Poitrines	4 €	12 €	7 €
Lardons	4 €	13 €	9 €

Par exemple, la planification suivante rapporte un bénéfice net de 9965 € .

	Frais	Fumés en heures normales	Fumés en heures supplémentaires
Jambons	165	280	35
Poitrines	295	70	35
Lardons	55	70	105

On veut trouver la planification qui maximise le bénéfice total net. Formulez ce problème en PL dans la forme canonique.

- Exercice 9 - Radios. La fabrique RadioIn fabrique deux types de radios A et B. Chaque radio produite est le fruit des efforts conjoints de 3 spécialistes Pierre, Paul et Jean. Pierre travaille au plus 24 heures par semaine. Paul travaille au plus 45 heures par semaine. Jean travaille au plus 30 heures par semaine. Les ressources nécessaires pour construire chaque type de radio ainsi que leurs prix de vente sont donnés dans le tableau ci-dessous :

	Radio A	Radio B
Pierre	1h	2h
Paul	2h	1h
Jean	1h	3h
Prix de vente	15 €	10 €

On suppose que l'entreprise n'a aucun problème à vendre sa production, quelle qu'elle soit.

a. Modéliser le problème de la recherche d'un plan de production hebdomadaire maximisant le chiffre d'affaire de RadioIn sous forme d'un programme linéaire. Préciser clairement les variables de décision, la fonction objectif et les contraintes.
b. Résoudre ce programme linéaire graphiquement et donner le plan de production optimal.

- Exercice 10 - Mobiles. Un assembleur de mobiles doit fournir par contrat 20000 téléphones dans les quatre prochaines semaines. Le client payera 20 € pour chaque mobile livré avant la fin de la première semaine, 18 € pour ceux livrés avant la fin de la deuxième semaine, 16 € pour ceux livrés avant la fin de la troisième semaine et 14 € avant la fin de la quatrième. Chaque ouvrier peut assembler 50 mobiles par semaine. La société ne peut honorer la commande avec ses 40 ouvriers, ainsi elle doit embaucher et former des travailleurs temporaires. Chacun des 40 ouvriers permanents peut être affecté à la formation d'une classe de trois travailleurs temporaires. Après une semaine de formation, ceux qui ont suivi la formation peuvent soit monter des mobiles soit instruire des ouvriers non qualifiés.

A cet instant il n'y a pas d'autre contrat en cours mais tous les ouvriers, permanents ou temporaires, seront payés jusqu'à la fin des quatre semaines (même si certains sont inoccupés).

Un ouvrier qui produit des mobiles, est inactif ou instruit reçoit un salaire de 200 € par semaine alors qu'un ouvrier en formation perçoit 100 € par semaine. Le coût de production (sans compter les salaires) est de 5 € par mobile.

Par exemple, la compagnie peut adopter le programme de fabrication suivant.

Semaine 1	10 assembleurs, 30 instructeurs, 90 apprentis Salaires des travailleurs : 8000 € Salaires des apprentis : 9000 € Profit sur les 500 mobiles : 7500 € Perte nette : 9500 €
Semaine 2	120 assembleurs, 10 instructeurs, 30 apprentis Salaires des travailleurs : 26000 € Salaires des apprentis : 3000 € Profit sur les 6000 mobiles : 78000 € Profit net : 49000 €
Semaine 3	160 assembleurs Salaires des travailleurs : 32000 € Profit sur les 8000 mobiles : 88000 € Profit net : 56000 €
Semaine 4	110 assembleurs, 50 inactifs Salaires des travailleurs : 32000 € Profit sur les 5500 mobiles : 49500 € Profit net : 17500 €

Ce programme de planification qui rapporte 113000 € à la compagnie est l'un des nombreux possibles. La compagnie souhaite faire le meilleur bénéfice possible : formulez ce problème sous la forme d'un PL (pas nécessairement sous forme canonique).

- Exercice 11 - Vélo. [S. Masuda (1970) ; voir aussi V. Chvátal (1983).] Dans le problème de la bicyclette, n personnes doivent parcourir 10 km et disposent d'une seule bicyclette (monoplace). Les données pour une personne j sont sa vitesse w_j de marche à pieds et sa vitesse b_j à bicyclette. Le problème consiste à minimiser la date d'arrivée de la dernière des 10 personnes.

a. Résoudre à la main le cas $n = 3, w_1 = 4, w_2 = w_3 = 2, b_1 = 16, b_2 = b_3 = 12$.

b. Montrez que la valeur optimale du programme linéaire

$$
\begin{array}{llcll}
\text{Minimiser} & t & & & \\
\text{Sous} & t - x_j - x_j^{'} - y_j - y_j^{'} & \geq & 0 & (j = 1, 2, \cdots, n) \\
 & t - \sum_{j=1}^{n} y_j - \sum_{j=1}^{n} y_j^{'} & \geq & 0 & \\
 & w_j x_j - w_j x_j^{'} + b_j y_j - b_j y_j^{'} & = & 10 & (j = 1, 2, \cdots, n) \\
 & \sum_{j=1}^{n} b_j y_j - \sum_{j=1}^{n} b_j y_j^{'} & \geq & 10 & \\
 & x_j, x_j^{'}, y_j, y_j^{'} & \geq & 0 & (j = 1, 2, \cdots, n)
\end{array}
$$

donne une borne inférieure sur la valeur optimale du problème de la bicyclette.

- Exercice 12 - Thermes. Après la réhabilitation des thermes de SEIX (Ariège), le propriétaire de l'hôtel du Mont Vallier décide de faire un certain nombre d'aménagements afin de décrocher deux étoiles au guide Michelin. Pour cela toutes les chambres doivent comporter une douche ou une salle de bains, mais la proportion de chambres n'étant équipée que d'une douche ne doit pas dépasser 25%. Une chambre peut être aménagée avec un lit double (2 couchages) ou un lit double et un lit simple (3 couchages). Cependant, vu la taille des chambres actuelles, seulement 50% de celles-ci pourraient contenir 3 couchages. La quasi-totalité des clients seront des curistes et optent donc en général pour une pension complète. Les heures d'ouverture des thermes obligent le restaurant de l'hôtel à n'envisager qu'un service unique fixé à midi trente. La salle de restaurant ne pouvant accueillir que 100 personnes, cela a bien sûr des conséquences sur le nombre de chambres à proposer. On suppose qu'en période de cure l'hôtel est systématiquement rempli.

Ecrire sans le résoudre le programme linéaire qui permettra de déterminer le nombre de chambres de chaque type que devra aménager le propriétaire afin de maximiser son bénéfice. Les tarifs des chambres en euros sont donnés ci-dessous :

	2 couchages	3 couchages
Douche	40	55
Salle de bains	45	60

On notera respectivement $x1$, $x2$, $x3$, $x4$, le nombre de chambres à 2 couchages avec douche, à 2 couchages avec salle de bains, à 3 couchages avec douche, à 3 couchages avec salle de bains.

- Exercice 13 - Bétail On désire déterminer la composition, à coût minimum, d'un aliment pour le bétail composé de maïs, de soja et d'herbe. L'aliment ainsi conditionné devra comporter au plus 0.5 % de calcium, au maximum 5 % de fibres et au moins 30 % de protéïnes, pour se conformer au désir de la clientèle. On a indiqué ci-dessous les pourcentages de calcium, de fibres et de protéïnes contenus, respectivement, dans le maïs et le soja, ainsi que le coût par tonne de chacun de ces produits bruts (on suppose que le prix de l'herbe est nul et que sa teneur en calcium, fibres et protéïnes est négligeable).

Produit brut	Pourcentage de calcium	Pourcentage de fibres	Pourcentage de protéïnes	Prix (€)
Maïs	0.1 %	2 %	9 %	400
Soja	0.2 %	6 %	60 %	1200
Pourcentage requis	$\leq$ 0.5%	$\leq$ 5%	$\geq$ 30%	

Formuler le problème sous la forme d'un programme linéaire, le résoudre graphiquement et donner la composition optimale du mélange et son coût.

- Exercice 14 - Pastilles. L'entreprise R&O's produit des pastilles chocolatées. Chaque pastille est formée d'un cœur en chocolat enrobé d'une couche de sucre coloré. Les pastilles sont commercialisées en paquets de 100g. Pour faire 1kg de pastilles, il faut 750g de chocolat et 250g de sucre. Quatre couleurs sont disponibles pour colorer les pastilles : vert, jaune, rouge et brun. Chaque paquet doit contenir au moins 20% de pastilles de chaque couleur et la quantité de pastilles rouges et jaunes ne doit pas être inférieure à celle des pastilles vertes et brunes. On suppose que tous les paquets ont la même répartition. Pour le mois à venir, l'entreprise dispose de

a. C tonnes de chocolat
b. S tonnes de sucre
c. colorant brun en suffisance
d. colorant rouge pour au plus R tonnes de pastilles
e. colorant jaune pour au plus J tonnes de pastilles
f. colorant vert pour au plus V tonnes de pastilles.

En ne tenant compte que des contraintes exposées ci-dessus, formuler un programme linéaire permettant à l'entreprise de déterminer le nombre maximal de paquets qu'elle peut produire pendant le prochain mois.

- Exercice 15 - Verres. Une verrerie produit des verres à vin, des verres à eau et des flûtes à champagne. Les prix de vente, les quantités requises de verre ainsi que les temps de façonnage et d'emballage sont différents pour chacun des produits et sont résumés dans la table suivante :

	Verres à vin	Verres à eau	Flûtes à champagne
Temps de façonnage (min)	4	2	12
Temps d'emballage (min)	2	1	4
Quantité de verre (kg)	0.1	0.15	0.1
prix de vente (€)	8	6	15

Pour la semaine à venir, l'entreprise dispose de 3000 minutes pour le façonnage, de 1200 minutes pour l'emballage et de 100 kilogrammes de verre.

Formuler un programme linéaire aidant l'entreprise à déterminer une production maximisant son chiffre d'affaires en utilisant les variables de décision suivantes : x_1 nombre de verres à vin produits pendant la semaine à venir ; x_2 nombre de verre à eau produits pendant la semaine à venir ; x_3 nombre de flûtes à champagne produites pendant la semaine à venir.

- Exercice 16 - Horaires de bus. Le tableau suivant contient les différents horaires possibles pour les chauffeurs d'une compagnie de bus. Cette dernière cherche à déterminer les horaires à retenir de manière à assurer, à moindre coût, qu'au moins un chauffeur soit présent pendant chaque heure de la journée (de 9 à 17 heures).

Horaire	9 à 11h	9 à 13h	11 à 16h	12 à 15h	13 à 16h	14 à 17h	16 à 17h
Coût	18	30	38	14	22	16	9

Formuler un programme linéaire en nombres entiers permettant de résoudre le problème de décision de la compagnie.

- Exercice 17 - Téléphones. Avant l'arrivage massif de nouveaux modèles, un vendeur de téléphones portables veut écouler rapidement son stock composé de huit appareils, quatre kits 'mains libres' et dix-neuf cartes avec des communications prépayées. Après une étude de marché, il sait très bien que dans cette période de soldes, il peut proposer aux clients un téléphone avec deux cartes et que cette offre va lui

rapporter un profit net de sept euros. Il peut aussi préparer à l'avance un coffret composé d'un téléphone, d'un kit 'mains libres' et de trois cartes, ce qui va lui rapporter un profit net de neuf euros. Il est assuré de pouvoir vendre tranquillement n'importe quelle quantité de ces offres dans la limite du stock disponible. Quelle quantité de chaque offre notre vendeur doit-il préparer pour maximiser son profit net ?
Un représentant commercial d'une grande surface lui propose d'acheter son stock 'en vrac'. Quels sont les prix unitaires raisonnables qu'il doit négocier pour chaque produit (téléphone, kit 'mains libres', carte prépayée) ?

- Exercice 18 - Sac à dos. Modéliser le problème de sac à dos suivant sous forme d'un programme linéaire en nombres entiers. La capacité du sac est de 50 litres. On ne cherchera pas à résoudre le problème.

	objet 1	objet 2	objet 3	objet 4	objet 5
volume	20	16	7	10	42
prix	25	18	10	12	50

- Exercice 19 - Bureaux. Un directeur d'école désire changer les bureaux de toutes les classes. Il a réussi à obtenir des tablettes à un prix intéressant et doit maintenant acheter plusieurs barres de métal pour faire les pieds. L'entreprise lui propose des barres de 2.10 mètres à bon marché.

En fonction de l'âge des élèves (et surtout de leur taille !), la hauteur des bureaux varie. Le directeur désire construire 60 petits bureaux (hauteur : 50cm), 80 bureaux de taille moyenne (hauteur : 80cm) et 65 grands bureaux (hauteur : 1.10m). Pour construire un petit bureau, il devra donc découper 4 barres d'une longueur de 50cm.

Le directeur se demande comment découper les barres de 2.10m pour obtenir le nombre de pieds nécessaires tout en minimisant les pertes de métal.
Formulez ce problème en programme linéaire.

- Exercice 20 - Pièces. L'entreprise où vous travaillez fabrique des pièces pour l'industrie automobile. Une pièce passe successivement dans ces trois ateliers : usinage, assemblage et finition. Une pièce après l'usinage et l'assemblage (sans finition) est dite 'pièce brute'. Après finition, la pièce est dite 'pièce finie'. Les pièces sont de trois types notés P_1, P_2, P_3.
Votre entreprise s'est engagée par contrat à livrer à un fabriquant automobile P_1, P_2, P_3, soit sous forme de pièces brutes, soit sous forme de pièces finies, en quantités globales respectives de 500, 1000 et 800 par mois. Cependant, il doit y avoir au moins 50% de pièces finies (soit au moins 250, 500 et 400). L'industrie automobile achète vos pièces brutes à des prix unitaires de 800 € , 400 € , 750 € et les pièces finies à des prix unitaires de 1000 € , 500 € , 900 € . Tout manquement à ce contrat aurait des conséquences désastreuses pour l'entreprise et pour vous...
Le service marketing estime de son côté qu'il est possible d'écouler des pièces finies chez un distributeur de pièces détachées. Les quantités maximales sont de 50 P_1 par mois à un prix unitaire de 1200 € , 150 P_2 à 600 € , 100 P_3 à 850 € .
Le tableau suivant donne, pour chaque pièce, les divers temps de travail et le temps maximum disponible chaque mois pour les ateliers en heure normale :

atelier	P_1	P_2	P_3	temps normal
usinage	0.2	0.6	0.3	1400
assemblage	0.5	0.7	0.4	1750
finition	0.4	0.6	0.2	1300

Un accord syndical vous permet de faire appel aux heures supplémentaires dans la limite de 10% des heures normales. Le surcoût d'une heure supplémentaire est de 40 € dans l'atelier d'usinage, 60 € en assemblage, 50 € en finition. Il faut maximiser le profit total.

- Exercice 21 - Centrales. On considère trois centrales électriques de capacité de production respectives 700, 400 et 500 megawatt. Ces centrales desservent deux villes dont les besoins en électricité sont de 800 megawatt chacunes. Chaque centrale peut fournir tout ou partie de sa production à chacune des villes.

Les coûts d'acheminement (par megawatt) dans le réseau électrique sont donnés par le tableau suivant :

	Ville 1	Ville 2
Centrale 1	20	25
Centrale 2	15	10
Centrale 3	10	15

Le problème est de subvenir aux besoins des villes à moindre coût. Modéliser sous forme d'un programme linéaire. (On ne cherchera pas à résoudre le problème.)

- Exercice 22 - Ordinateurs. *Dans cet exercice, seules les solutions basées sur l'algorithme du simplexe seront prises en compte.*

Un assembleur d'ordinateurs portables propose deux modèles sur le marché : le X1 et le X2. Le X1 est équipé d'une carte wifi dont il ne possède que 600 exemplaires. De plus, il a en réserve 1600 barettes mémoire dont 2 sont nécessaires pour assembler un X1 et une pour assembler un X2. Les autres composants sont considérés comme étant en quantité illimitée. Enfin, il ne pourra pas stocker plus de 1200 ordinateurs portables une fois l'assemblage fait.

a. Il est possible de sous-traiter l'assemblage des portables à une société spécialisée, celle-ci acceptant à condition que le marché porte sur au moins 1000 ordinateurs. Un accord est-il possible ?
b. En supposant l'accord signé, l'assembleur table sur un bénéfice de 20 Euros par modèle X1 assemblé et de 12 Euros par modèle X2 assemblé. Quelle quantité de modèles X1 et X2 doit-il faire assembler pour obtenir un bénéfice maximal ?

- Exercice 23 - Médicaments. Une entreprise pharmaceutique fabrique trois types de médicaments : des somnifères, des euphorisants et des analgésiques, dont les bénéfices de production escomptés sont respectivement de 20, 20 et 10 milliers d'euros par kilo. Pour fabriquer chacun de ces médicaments, trois matières premières sont utilisées : de la caféïne, de la valériane et de la morphine. Les quantités nécessaires de ces produits pour fabriquer un kilo de médicaments sont résumées dans le tableau suivant :

	somnifère	euphorisants	analgésiques
Caféïne	0	2	4
Valériane	4	0	0
Morphine	4	1	4

Par ailleurs les quantités de caféïne, valériane et morphine sont limitées par leur production à respectivement 2, 4 et 2 unités par jour.

Le but de l'exercice est de planifier les quantités de médicaments à produire afin de maximiser le bénéfice quotidien.

a. Modéliser le problème sous forme d'un programme linéaire.
b. Résoudre celui-ci par l'algorithme du simplexe.
c. Justifier l'optimalité de la solution obtenue en se servant uniquement du dictionnaire final fourni par l'algorithme de la question précédente.

2 Programmes linéaires.

- Exercice 24 - Objectif positif. Soit le programme linéaire (P) suivant dans lequel tous les coefficients c_j sont strictement positifs :

$$\begin{array}{lll} \text{Maximiser} & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n & \\ \text{Sous} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i & i = 1 \ldots m \\ & x_1, \ldots, x_n \geq 0 & \end{array}$$

On suppose que la fonction objectif est bornée, montrer alors que le domaine de (P) est borné.

- Exercice 25 - Sommet du polyèdre. Montrer que si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est une solution associée à un dictionnaire faisable d'un programme linéaire (P), alors x vérifie la propriété suivante :

Si $y = (y_1, \ldots, y_n), z = (z_1, \ldots, z_n)$ sont solutions de (P) et $x = (y + z)/2$, alors $x = y$ ou $x = z$.

- Exercice 26 - Dites quel(s) programmes parmi les suivants sont sous forme canonique ?

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{Maximiser} & 3x_1 & - & 5x_2 & & \\ \text{Sous} & 4x_1 & + & 5x_2 & \geq & 3 \\ & 6x_1 & - & 6x_2 & = & 7 \\ & x_1 & + & 8x_2 & \leq & 20 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr} \text{Minimiser} & 3x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & + & 5x_5 & & \\ \text{Sous} & 9x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 5x_4 & + & 3x_5 & \leq & 5 \\ & 8x_1 & + & 9x_2 & + & 7x_3 & + & 9x_4 & + & 3x_5 & \leq & 2 \\ & & & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{Maximiser} & 8x_1 & - & 4x_2 & & \\ \text{Sous :} & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 7 \\ & 9x_1 & + & 5x_2 & \leq & -2 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

- Exercice 27 - Mettre sous la forme canonique :

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr} \text{Minimiser} & -8x_1 & + & 9x_2 & + & 2x_3 & - & 6x_4 & - & 5x_5 & & \\ \text{Sous} & 6x_1 & + & 6x_2 & - & 10x_3 & + & 2x_4 & - & 8x_5 & \geq & 3 \\ & & & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

- Exercice 28 - On se donne les programmes linéaires :

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{Maximiser} & 3x_1 & - & x_2 & & \\ \text{Sous} & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & -2x_1 & - & 2x_2 & \leq & -10 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array} \tag{1}$$

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{Maximiser} & x_1 & - & x_2 & & \\ \text{Sous :} & -2x_1 & + & x_2 & \leq & -1 \\ & -x_1 & - & 2x_2 & \leq & -2 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array} \tag{2}$$

Prouver à la main que (1) est non réalisable et que (2) n'est pas borné.

- Exercice 29 - Ecrire le programme linéaire suivant sous forme canonique.

$$\begin{array}{lrrl} \text{Minimiser} & x_1 & -x_2 & \\ \text{Sous} & x_1 & +x_2 & \geq 5 \\ & 3x_1 & -2x_2 & = 4 \\ & x_1 & & \geq 0 \end{array}$$

- Exercice 30 - Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur les valeurs réelles s et t pour que le programme :

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{Maximiser} & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{Sous} & sx_1 & + & tx_2 & \leq & 1 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

a. ait une solution optimale.

b. soit non réalisable.

c. soit non borné.

- Exercice 31 - On se donne les programmes suivants :

$$\begin{array}{lrcrl} \text{Maximiser} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\ \text{Sous} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_i & (i = 1, 2, \cdots, m) \\ & x_j & \geq & 0 & (j = 1, 2, \cdots, n). \end{array} \tag{3}$$

$$\begin{array}{lrcrl} \text{Maximiser} & x_k & & & \\ \text{Sous} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_i & (i = 1, 2, \cdots, m) \\ & x_j & \geq & 0 & (j = 1, 2, \cdots, n) \end{array} \tag{4}$$

Est-il vrai que si le programme (3) est non borné, alors il existe un indice k tel que le programme (4) est non borné ?

3 Résolution graphique.

- Exercice 32 - Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{lrrl} \text{Maximiser} & 120x_1 & +80x_2 & \\ \text{Sous} & 2x_1 & +x_2 & \leq 6 \\ & 7x_1 & +8x_2 & \leq 28 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

a. Résoudre graphiquement.

b. Résoudre graphiquement si on suppose de plus que x_1 et x_2 sont entiers.

- Exercice 33 - Utiliser la méthode graphique afin de déterminer quelles contraintes sont satisfaites avec égalité par la solution optimale du programme linéaire suivant. Quelle est cette solution optimale ?

$$\begin{array}{lrrl}
\text{Maximiser} & 2x_1 & +x_2 & \\
\text{Sous} & 2x_1 & -x_2 & \leq 5 \\
 & 2x_1 & -3x_2 & \geq -8 \\
 & x_1 & & \geq 2 \\
 & x_1 & +x_2 & \geq 4 \\
 & & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}$$

4 Simplexe en une phase.

- Exercice 34 - Résoudre par la méthode du simplexe les programmes suivants :

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{Maximiser} & 3x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & \\
\text{Sous} & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \\
 & 2x_1 & & & + & 3x_3 & \leq & 5 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 7 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\text{Maximiser} & 5x_1 & + & 6x_2 & + & 9x_3 & + & 8x_4 & & \\
\text{Sous} & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & \leq & 5 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & \leq & 3 \\
 & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcr}
\text{Maximiser} & 2x_1 & + & x_2 & & \\
\text{Sous} & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1 & + & 5x_2 & \leq & 1 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & 4x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

- Exercice 35 - Montrez que le programme linéaire suivant est non borné.

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{Maximiser} & 3x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & & \\
\text{Sous} & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & -3 \\
 & -2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & \leq & -5 \\
 & -3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \leq & -3 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

- Exercice 36 - Résoudre chacun des programmes linéaires suivants par la méthode graphique, puis par l'algorithme du simplexe.

a.

$$\begin{array}{lrrl} \text{Maximiser} & x_1 & +2x_2 & \\ \text{Sous} & x_1 & -x_2 & \leq 2 \\ & -2x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ & & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

b.

$$\begin{array}{lrrl} \text{Maximiser} & x_1 & +2x_2 & \\ \text{Sous} & x_1 & -x_2 & \leq 2 \\ & -2x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ & x_1 & +x_2 & \leq 6 \\ & & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

c.

$$\begin{array}{lrrl} \text{Maximiser} & x_1 & +2x_2 & \\ \text{Sous} & x_1 & -x_2 & \leq 2 \\ & -2x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ & x_1 & +x_2 & \leq 6 \\ & 2x_1 & +x_2 & \geq 12 \\ & & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

- Exercice 37 - Le polyèdre des solutions admissibles du système

$$\begin{array}{rrrl} -6x_1 & +3x_2 & & \leq 7 \\ & -3x_2 & +2x_3 & \leq 4 \\ 3x_1 & & -x_3 & \leq 3 \end{array}$$

avec $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ est-il borné ?

- Exercice 38 - Lors d'une itération du simplexe, on obtient le dictionnaire suivant :

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & = & 2 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_5 \\ x_4 & = & & - & x_2 & + & x_3 & + & 5x_5 \\ z & = & 10 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & - & \frac{3}{7}x_5 \end{array}$$

a. Donnez la solution associée à ce dictionnaire. Qu'a-t-elle de particulier ?

b. Que pouvez-vous dire sur l'itération suivante ? (Expliquez...)

- Exercice 39 - Non borné. Montrer que le programme suivant est non borné.

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{Maximiser} & x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & & \\ \text{Sous} & 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \leq & 10 \\ & 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 10 \\ & x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 10 \\ & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

- Exercice 40 - Utiliser la méthode du simplexe pour décrire *toutes* les solutions optimales du programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\text{Maximiser} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 4x_4 & & \\
\text{Sous} & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & \leq & 5 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & \leq & 3 \\
 & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

- Exercice 41 - Pour chaque affectation de a et b en *entrante* et *sortante*, confirmer ou infirmer les quatre propositions suivantes :

Une variable a dans un pivot du simplexe ne peut devenir b au pivot suivant.

- Exercice 42 - Montrer que le système suivant ne peut être un dictionnaire faisable lorsque x_3 et x_4 sont les variables basiques.

$$\begin{array}{rlll}
x_4 & = 1 & +x_3 & -x_2 \\
x_1 & = 3 & & -2x_2 \\
\hline
z & = 4 & -x_3 & -2x_2
\end{array}$$

- Exercice 43 - Cyclage. Exécuter six pivots de l'algorithme du simplexe sur le dictionnaire suivant.

$$\begin{array}{lrrrr}
x_5 = & -0.5x_1 & +5.5x_2 & +2.5x_3 & -9x_4 \\
x_6 = & -0.5x_1 & +1.5x_2 & +0.5x_3 & -x_4 \\
x_7 = 1 & -x_1 & & & \\
\hline
z = & 10x_1 & -57x_2 & -9x_3 & -24x_4
\end{array}$$

On appliquera la règle suivante pour le choix des variables entrantes et sortantes : La variable entrante doit avoir le plus grand coefficient dans la variable objectif z. Parmi les choix valides de variables sortantes, on selectionne celle qui a l'indice le plus petit.

- Exercice 44 - Montrer sur un exemple que le choix de la variable entrante selon le plus grand coefficient dans z ne garantit pas que l'augmentation du terme constant de z est maximale parmi tous les choix de pivots possibles.

5 Simplexe en deux phases.

- Exercice 45 - Résoudre les programmes linéaires suivants par la méthode du simplexe en deux phases :

a.

$$\begin{array}{lrrl}
\text{Maximiser} & 3x_1 & +x_2 & \\
\text{Sous} & x_1 & -x_2 & \leq -1 \\
 & -x_1 & -x_2 & \leq -3 \\
 & 2x_1 & +x_2 & \leq 4 \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0
\end{array}$$

b.

$$\begin{array}{lrrl} \text{Maximiser} & 3x_1 & +x_2 & \\ \text{Sous} & x_1 & -x_2 & \leq -1 \\ & -x_1 & -x_2 & \leq -3 \\ & 2x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

c.

$$\begin{array}{lrrl} \text{Maximiser} & 3x_1 & +x_2 & \\ \text{Sous} & x_1 & -x_2 & \leq -1 \\ & -x_1 & -x_2 & \leq -3 \\ & 2x_1 & -x_2 & \leq 2 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

d.

$$\begin{array}{lrrrl} \text{Maximiser} & -x_1 & -3x_2 & -x_3 & \\ \text{Sous} & 2x_1 & -5x_2 & +x_3 & \leq -5 \\ & 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & \leq 4 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array}$$

e.

$$\begin{array}{lrrl} \text{Maximiser} & -x_1 & -2x_2 & \\ \text{Sous} & -3x_1 & +x_2 & \leq -1 \\ & x_1 & -x_2 & \leq 1 \\ & -2x_1 & +7x_2 & \leq 6 \\ & 9x_1 & -4x_2 & \leq 6 \\ & -5x_1 & +2x_2 & \leq -3 \\ & 7x_1 & -3x_2 & \leq 6 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

- Exercice 46 -
Résolvez, à l'aide de la méthode du simplexe, le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{Maximiser} & 7x_1 & + & x_2 & & \\ \text{Sous} & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 4 \\ & -5x_1 & - & 2x_2 & \geq & 3 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

- Exercice 47 - Résoudre les problèmes suivants par la méthode du simplexe en deux phases.

a.

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{Maximiser} & 3x_1 & + & x_2 & & \\ \text{Sous} & x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -3 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

b.

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{Maximiser} & 3x_1 & + & x_2 & & \\ \text{Sous} & x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -3 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

c.

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{Maximiser} & 3x_1 & + & x_2 & & \\ \text{Sous} & x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -3 \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

- Exercice 48 - Le polyèdre défini par le système :

$$\begin{array}{rrrcr} -x_1 & +2x_2 & +2x_3 & \leq & 4 \\ -3x_1 & +x_2 & -x_3 & \leq & -5 \\ x_1 & -2x_2 & -x_3 & \leq & -1 \\ & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

1. est-il vide ?
2. est-il borné ?

- Exercice 49 - Résoudre le programme linéaire suivant avec l'algorithme du simplexe en deux phases.

$$\begin{array}{lrrrrcr} \text{Maximiser} & -3x_1 & +2x_2 & -2x_3 & -x_4 & & \\ \text{Sous} & 4x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 & \leq & -2 \\ & -x_1 & & -x_3 & & \leq & -10 \\ & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

6 Dualité.

- Exercice 50 - Piles, suite et fin. Suite de l'Exercice 1.

a. Ecrire le dual (D) du programme linéaire de l'exercice 1 de la fiche 1.

b. Déduire une solution de (D) à partir du dictionnaire final.

c. Interpréter cette solution en termes de combinaisons d'inégalités.

d. Il est possible de louer des heures supplémentaires de la presse Glunt II au prix de 280 euros de l'heure. Est-ce intéressant ?

e. Combien d'heures au maximum peut-on louer la presse ?

- Exercice 51 - Ecrire les programmes linéaires suivants sous forme canonique et calculer leurs duals :

a.

$$\begin{array}{lrrcr} \text{Maximiser} & 2x_1 & +3x_2 & & \\ \text{Sous} & 2x_1 & +x_2 & \leq & 10 \\ & x_1 & +2x_2 & = & 5 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

b.

$$\begin{array}{lrrcr} \text{Maximiser} & x_1 & +x_2 & & \\ \text{Sous} & x_1 & -x_2 & \leq & 4 \\ & & x_1 & \geq & 0 \end{array}$$

c.

$$\begin{array}{lrrrcr} \text{Maximiser} & x_1 & +x_2 & +x_3 & & \\ \text{Sous} & x_1 & -x_2 & +x_3 & \leq & 4 \\ & 2x_1 & -3x_2 & -x_3 & = & -2 \\ & & & x_1, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

- Exercice 52 - On se donne le programme linéaire (P) suivant :

$$\begin{array}{lrrrcr} \text{Maximiser} & -x_1 & -3x_2 & -x_3 & & \\ \text{Sous} & 2x_1 & -5x_2 & +x_3 & \leq & -5 \\ & 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & \leq & 4 \\ & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

a. Résoudre (P) par l'algorithme du simplexe en deux phases.

b. Justifier s'il y a lieu, l'optimalité de la solution trouvée en utilisant le dual.

- Exercice 53 - Le cas non faisable/non faisable. Proposer un programme linéaire n'admettant pas de solution tel que son dual n'admet pas non plus de solutions.

- Exercice 54 - On considère le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr} \text{Minimiser} & -2x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & - & 3x_4 & & \\ \text{Sous} & -2x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & \geq & -8 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & \leq & 7 \\ & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array} \tag{5}$$

a. Ecrire le programme (5) sous forme canonique.

b. Ecrire le dual (D) du programme (5).

c. Donner une solution graphique du programme dual (D).

d. Effectuer la première itération du simplexe sur le programme (5). Après trois itérations, on trouve que la solution optimale de ce programme est $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$ et $x_4 = 3$.

e. Vérifiez que la solution de (D) obtenue à la question c) est optimale.

- Exercice 55 - On se donne le programme linéaire (P) suivant :

$$\begin{array}{lrrrrcr} \text{Maximiser} & -3x_1 & +2x_2 & -2x_3 & -x_4 & & \\ \text{Sous} & 4x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 & \leq & 2 \\ & -x_1 & & -x_3 & & \leq & 2 \\ & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

a. Résoudre (P) avec l'algorithme du simplexe en deux phases *à l'exclusion de toute autre méthode.*

b. Ecrire le dual (D) du programme (P).

c. Résoudre (D) géométriquement. La solution trouvée est-elle compatible avec celle de (P) ?

- Exercice 56 - On se donne le problème suivant, dont le but est la maximisation de la fonction compétence d'une affectation agents/tâches.

compétence	tâche 1	tâche 2	tâche 3	tâche 4
agent 1	5	3	4	5
agent 2	4	5	4	6
agent 3	5	6	5	7
agent 4	4	4	3	5

Le dictionnaire final obtenu lors de la résolution de ce programme est :

$x_{13} =$	1	$-a_1$		$+t_2$			$-a_2$	$-x_{23}$		$+t_1$	$-a_3$	$-x_{33}$	$+t_4$		$-a_4$	$-x_{43}$	
$x_{24} =$	1					$-x_{21}$	$-a_2$	$-x_{23}$	$-x_{22}$								
$x_{32} =$	1		$-x_{31}$			$-x_{21}$	$-a_2$	$-x_{23}$	$-x_{22}$		$-a_3$	$-x_{33}$	$+t_4$	$+x_{14}$			$+x_{44}$
$x_{42} =$	0		$+x_{31}$	$-t_2$	$-x_{12}$	$+x_{21}$	$+a_2$	$+x_{23}$			$+a_3$	$+x_{33}$	$-t_4$	$-x_{14}$			$-x_{44}$
$x_{41} =$	1		$-x_{31}$	$+t_2$	$+x_{12}$	$-x_{21}$	$-a_2$	$-x_{23}$			$-a_3$	$-x_{33}$	$+t_4$	$+x_{14}$	$-a_4$	$-x_{43}$	
$x_{11} =$	0			$-t_2$	$-x_{12}$		$+a_2$	$+x_{23}$		$-t_1$	$+a_3$	$+x_{33}$	$-t_4$	$-x_{14}$	$+a_4$	$+x_{43}$	
$t_3 =$	0	$+a_1$		$-t_2$			$+a_2$			$-t_1$	$+a_3$		$-t_4$		$+a_4$		
$x_{34} =$	0					$+x_{21}$	$+a_2$	$+x_{23}$	$+x_{22}$				$-t_4$				$-x_{44}$
$z =$	20	$-4a_1$	$-x_{31}$	$-t_2$	$-2x_{12}$	$-x_{21}$	$-4a_2$	$+0x_{23}$	$+0x_{22}$	$-t_1$	$-5a_3$	$+0x_{33}$	$-2t_4$	$-x_{14}$	$-3a_4$	$+0x_{43}$	$+0x_{44}$

a. Déduire de ce dictionnaire une solution optimale du problème d'affectation.

b. En déduire un certificat d'optimalité. Expliquer soigneusement en quoi ce certificat consiste.

7 Ecarts complémentaires.

- Exercice 57 - On considère le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{llcrcrcrcl}
\text{Maximiser} & & & x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & & \\
\text{Sous} & & & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 4 \\
 & & & -4x_1 & + & 3x_2 & & & \leq & 2 \\
 & & & 3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & \leq & 5 \\
 & & & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

La solution $x_1^* = 0$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 4$ est-elle optimale ?

- Exercice 58 - On considère le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\text{Maximiser} & 7x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & & \\
\text{Sous} & x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \leq & 4 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 3 \\
 & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & \leq & 5 \\
 & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & \leq & 1 \\
 & & & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

La solution $x_1^* = 0, x_2^* = \frac{4}{3}, x_3^* = \frac{2}{3}, x_4^* = \frac{5}{3}, x_5^* = 0$, est-elle optimale ?

- Exercice 59 - La solution $x_1 = 1/7$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4/7$, $x_4 = 0$ est-elle solution optimale du programme linéaire suivant ? Justifier votre réponse.

$$\begin{array}{lrrrrcl}
\text{Maximiser} & 6x_1 & & +8x_3 & +4x_4 & & \\
\text{Sous} & 7x_1 & +8x_2 & +7x_3 & +2x_4 & \leq & 5 \\
 & 4x_1 & +x_2 & +6x_3 & +10x_4 & \leq & 4 \\
 & 9x_1 & +5x_2 & +2x_3 & +10x_4 & \leq & 3 \\
 & 3x_1 & +10x_2 & +3x_3 & +4x_4 & \leq & 6 \\
 & & & \multicolumn{2}{r}{x_1, x_2, x_3, x_4} & \geq & 0
\end{array}$$

- Exercice 60 - La solution $x_1 = 2/13$, $x_2 = 0$, $x_3 = 8/13$, $x_4 = 0$ est-elle solution optimale du programme linéaire suivant ? Justifier votre réponse.

$$\begin{array}{lrrrrcl}
\text{Maximiser} & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & \\
\text{Sous} & 5x_1 & +6x_2 & +2x_3 & +3x_4 & \leq & 2 \\
 & x_1 & +3x_2 & +3x_3 & +5x_4 & \leq & 2 \\
 & 2x_1 & +6x_2 & +4x_3 & +2x_4 & \leq & 3 \\
 & 6x_1 & +5x_2 & +4x_3 & +x_4 & \leq & 6 \\
 & & & \multicolumn{2}{r}{x_1, x_2, x_3, x_4} & \geq & 0
\end{array}$$

- Exercice 61 - Maximiser le rapport de deux fonctions linéaires

On veut maximiser la fonction

$$\frac{3 + 2x_1 + 5x_2 + x_3}{1 + 3x_1 + x_2 + 4x_3}$$

sous les contraintes que $5x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 10$ et $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 2$ avec les x_i tous positifs ou nuls.

Montrer comment ce problème peut se modéliser par le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{rrrrrcr}
\text{Maximiser} & 3t & +2y_1 & +5y_2 & +y_3 & & \\
\text{Sous} & t & +3y_1 & +y_2 & +4y_3 & = & 1 \\
 & & 5y_1 & +y_2 & +6y_3 & \leq & 10t \\
 & & y_1 & +2y_2 & +y_3 & \leq & 2t \\
 & & & \multicolumn{2}{r}{t, y_1, y_2, y_3} & \geq & 0
\end{array}$$

On cherchera pour cela à exprimer les variables t, y_1, y_2, y_3 en fonction de x_1, x_2, x_3.