UNIVERSITÉ PARIS OUEST NANTERRE LA DÉFENSE
U.F.R. SEGMI — Année universitaire 2012 – 2013
Master d'économie — Cours de M. Desgraupes

Méthodes Numériques

Document 4 : Corrigé des exercices d'optimisation linéaire

---

1 Programmation linéaire

Corrigé ex. 1 : Méthode du simplexe

Programme 1

$$\begin{cases} \text{Max}\,(x_1 + 2x_2) \\ x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1 \text{ et } x_2 \geq 0 \end{cases}$$

On introduit des variables d'écart, ce qui conduit aux équations suivantes pour les contraintes du problème :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 21 \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 &= 18 \\ x_1 - x_2 + x_5 &= 5 \end{cases}$$

Le premier tableau du simplexe s'écrit :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	3	1	0	0	21	x_3
-1	3	0	1	0	18	x_4
1	-1	0	0	1	5	x_5
-1	-2	0	0	0	0	

La variable entrante est x_2 qui correspond à l'élément le plus négatif de la dernière ligne. La variable sortante se calcule en trouvant le plus petit rapport positif entre la colonne de droite et la colonne de x_2 (colonne entrante) :

$$\mathrm{Min}\Big(\frac{21}{3}, \frac{18}{3}\Big) = \frac{18}{3} = 6$$

Donc x_4 est la variable sortante. La ligne de x_4 sert de ligne pivot et on exécute une transformation du pivot autour de la valeur 3 (à l'intersection de la ligne de x_4 et de la colonne de x_2).

On obtient le tableau suivant :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
2	0	1	-1	0	3	x_3
-1/3	1	0	1/3	0	6	x_2
2/3	0	0	1/3	1	11	x_5
-5/3	0	0	2/3	0	12	

Maintenant c'est x_1 qui entre et x_3 qui sort car :

$$\mathrm{Min}\Big(\frac{3}{2}, \frac{11}{2/3}\Big) = \frac{3}{2}$$

Un nouveau pivot autour du nombre 2 (à l'intersection de la ligne de x_3 et de la colonne de x_1) conduit au tableau suivant :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	0	1/2	-1/2	0	3/2	x_1
0	1	1/6	1/6	0	13/2	x_2
0	0	-1/3	2/3	1	10	x_5
0	0	5/6	-1/6	0	29/2	

Maintenant c'est x_4 qui entre et x_5 qui sort car :

$$\mathrm{Min}\Big(\frac{13/2}{1/6}, \frac{10}{2/3}\Big) = \frac{10}{2/3} = 15$$

Un nouveau pivot autour du nombre 2/3 (à l'intersection de la ligne de x_5 et de la colonne de x_4) conduit au tableau suivant :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	0	1/4	0	3/4	9	x_1
0	1	1/4	0	-1/4	4	x_2
0	0	-1/2	1	3/2	15	x_4
0	0	3/4	0	1/4	17	

Ce tableau correspond à l'optimum car il n'y a plus de termes négatifs dans la dernière ligne. On obtient donc comme solution :

$$\begin{cases} x_1^* &= 9 \\ x_2^* &= 4 \\ x_3^* &= 0 \\ x_4^* &= 15 \\ x_5^* &= 0 \end{cases}$$

La première et la troisième contrainte sont saturées.

Programme 2

$$\begin{cases} \text{Min}\,(x_1 - 3x_2) \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 7 \\ -x_1 + 4x_2 \leq 9 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 \text{ et } x_2 \geq 0 \end{cases}$$

On transforme le problème en une maximisation en changeant le signe de la fonction objectif :

$$\text{Max}\,(-x_1 + 3x_2)$$

On introduit ensuite les variables d'écart comme ceci :

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 7 \\ -x_1 + 4x_2 + x_4 = 9 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_5 = 6 \\ x_1 \text{ et } x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Le tableau de départ pour la méthode du simplexe est donc :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
3	-2	1	0	0	7	x_3
-1	4	0	1	0	9	x_4
-2	3	0	0	1	6	x_5
1	-3	0	0	0	0	

La variable entrante est x_2 qui correspond à l'élément le plus négatif de la dernière ligne. La variable sortante se calcule en trouvant le plus petit rapport positif entre la colonne de droite et la colonne de x_2 (colonne entrante) :

$$\text{Min}\left(\frac{9}{4}, \frac{6}{3}\right) = \frac{6}{3} = 2$$

Donc x_5 est la variable sortante. La ligne de x_5 sert de ligne pivot / on exécute une transformation du pivot autour de la valeur 3 (à l'intersection de la ligne de x_5 et de la colonne de x_2).

Cela conduit au tableau suivant :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
5/3	0	1	0	2/3	11	x_3
5/3	0	0	1	-4/3	1	x_4
-2/3	1	0	0	1/3	2	x_2
-1	0	0	0	1	6	

Cette fois la variable x_1 entre dans la base et la variable x_4 sort car :

$$\mathrm{Min}\Big(\frac{11}{5/3}, \frac{1}{5/3}\Big) = \frac{3}{5}$$

Le pivot se fait autour de la valeur 5/3 (à l'intersection de la ligne de x_4 et de la colonne de x_1). On obtient alors le tableau suivant :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	0	1	-1	2	10	x_3
1	0	0	3/5	-4/5	3/5	x_1
0	1	0	2/5	-1/5	12/5	x_2
0	0	0	3/5	1/5	33/5	

Il n'y a plus de terme négatif dans la dernière ligne et on est donc à l'optimum. La solution est :

$$\begin{cases} x_1^* & = 3/5 \\ x_2^* & = 12/5 \\ x_3^* & = 10 \\ x_4^* & = 0 \\ x_5^* & = 0 \end{cases}$$

La deuxième et la troisième contrainte sont saturées. Il ne faut pas oublier de rechanger le signe de la fonction objectif : la valeur à l'optimum est -33/5 (alors que la case inférieure droite du tableau indique 33/5 car ce tableau correspond à la maximisation de $-f$).

Corrigé ex. 2 : Raffinerie de pétrole

On désigne par x_1 et x_2 les quantités de brut 1 et 2 qu'il faut traiter. La fonction objectif est la marge totale, qu'il faut maximiser :

$$\mathrm{Max}\ (3x_1 + 4x_2)$$

Les contraintes de production s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} 0,25x_1 + 0,35x_2 & \leq 825 \\ 0,30x_1 + 0,30x_2 & \leq 750 \\ 0,45x_1 + 0,35x_2 & \leq 1065 \end{cases}$$

qui se simplifient sous la forme suivante :

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 & \leq 16500 \\ x_1 + x_2 & \leq 2500 \\ 9x_1 + 7x_2 & \leq 21300 \end{cases}$$

Si on note x_3, x_4, x_5 les variables d'écart, les contraintes deviennent :

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + x_3 & = 16500 \\ x_1 + x_2 + x_4 & = 2500 \\ 9x_1 + 7x_2 + x_5 & = 21300 \end{cases}$$

Les tableaux du simplexe sont successivement :

Tableau 1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
5	7	1	0	0	16500	x_3
1	1	0	1	0	2500	x_4
9	7	0	0	1	21300	x_5
-3	-4	0	0	0	0	

x_2 entre et x_3 sort.

Tableau 2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
5/7	1	1/7	0	0	16500/7	x_2
2/7	0	-1/7	1	0	1000/7	x_4
4	0	-1	0	1	4800	x_5
-1/7	0	4/7	0	0	66000/7	

x_1 entre et x_4 sort.

Tableau 3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	1	1/2	-5/2	0	2000	x_2
1	0	-1/2	7/2	0	500	x_1
0	0	1	-14	1	2800	x_5
0	0	1/2	1/2	0	9500	

Il n'y a plus de terme négatif dans la dernière ligne et on est donc à l'optimum. La solution est :

$$\begin{cases} x_1^* & = 500 \\ x_2^* & = 2000 \\ x_3^* & = 0 \\ x_4^* & = 0 \\ x_5^* & = 2800 \end{cases}$$

La valeur à l'optimum est $f^* = 9500$. La première et le deuxième contrainte sont saturées : les quotas imposés pour l'essence et le gasoil sont atteints. La troisième présente un écart de 140 (le tableau indique 2800 mais cette contrainte avait été divisée par 20 avant d'être insérée dans le tableau) : cela signifie que le quota de 1065 imposé sur le fuel n'est pas atteint et qu'on fabrique seulement $1065 - 140 = 925$ milliers de m^3 de fuel.

Corrigé ex. 3 : Méthode des variables ajoutées

Les deux programmes d'optimisation de cet exercice présentent une difficulté supplémentaire pour appliquer la méthode du simplexe : on ne peut pas démarrer le simplexe à partir de l'origine (c'est-à-dire à partir du point de coordonnées nulles) car ce point ne vérifie pas les contraintes. L'origine ne fait pas partie du domaine réalisable.

Il faut donc trouver un point de départ dans le domaine réalisable, autrement dit trouver un point *à coordonnées positives* qui vérifie les équations des contraintes. On utilise pour cela la méthode des variables ajoutées. Elle consiste à introduire des variables supplémentaires $x_{1,a}, x_{2,a}, \dots$ dans les contraintes et à chercher à les annuler. Comme ce sont des variables positives, il suffit d'annuler leur somme et on en fait un problème d'optimisation en fixant comme objectif de minimiser cette somme :

$$\text{Min} \sum_j x_{j,a}$$

Il y a autant de variables ajoutées qu'il y a de contraintes.

Programme 1

$$\begin{cases} \text{Max}\,(x_1 - x_2 + x_3) & & \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 & = & 3 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 & = & 1 \\ x_1, x_2, x_3 \text{ et } x_4 & \geq & 0 \end{cases}$$

On introduit 3 variables positives $x_{1,a}, x_{2,a}, x_{3,a}$ dans les contraintes et on cherche à minimiser la fonction objectif $x_{1,a} + x_{2,a} + x_{3,a}$. On se ramène à un problème de maximisation en changeant le signe de cette fonction objectif. Le problème s'écrit donc sous la forme suivante

$$\text{Max}\,(-x_{1,a} - x_{2,a} - x_{3,a})$$

$$\begin{cases} -3x_1 & +2x_2 & +x_3 & & +x_{1,a} & & & = & 1 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & & +x_{2,a} & & = & 3 \\ x_1 & +4x_2 & +2x_3 & -2x_4 & & & +x_{3,a} & = & 1 \end{cases}$$

avec les contraintes

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_{1,a}, x_{2,a}, x_{3,a} \geq 0$$

La fonction objective initiale du problème est pour le moment ignorée. Le problème avec les variables ajoutées peut se traiter au moyen de la méthode du simplexe ordinaire. La configuration de départ consiste à annuler les variables x_1, x_2, x_3, x_4 qui sont ainsi des variables hors-base. Les variables de base sont donc au départ :

$$\begin{cases} x_{1,a} & = 1 \\ x_{2,a} & = 3 \\ x_{3,a} & = 1 \end{cases}$$

Très important : il faut veiller à ce que la fonction objectif $(-x_{1,a} - x_{2,a} - x_{3,a})$ soit exprimée en fonction des variables hors-base. C'est une règle qui doit toujours être vérifiée :

À tous les stades de la méthode du simplexe, la fonction objectif et les variables de base doivent être exprimées en fonction des variables hors-base.

On doit donc, avant de commencer, extraire $x_{1,a}, x_{2,a}, x_{3,a}$ en fonction de x_1, x_2, x_3, x_4 et les remplacer dans la fonction objectif. On a :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{1,a} & = & 1 + 3x_1 - 2x_2 - x_3 \\ x_{2,a} & = & 3 - x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \\ x_{3,a} & = & 1 - x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 \end{array} \right.$$

D'où

$$-x_{1,a} - x_{2,a} - x_{3,a} = -5 - x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4$$

À partir de là, la méthode du simplexe s'applique sans problèmes.

Tableau 1

x_1	x_2	x_3	x_4	$x_{1,a}$	$x_{1,a}$	$x_{3,a}$		
-3	2	1	0	1	0	0	1	$x_{1,a}$
1	-1	-1	1	0	1	0	3	$x_{2,a}$
1	4	2	-2	0	0	1	1	$x_{3,a}$
1	-5	-2	1	0	0	0	-5	

x_2 entre et $x_{3,a}$ sort.

Tableau 2

x_1	x_2	x_3	x_4	$x_{1,a}$	$x_{1,a}$	$x_{3,a}$		
-7/2	0	0	1	1	0	-1/2	1/2	$x_{1,a}$
5/4	0	-1/2	1/2	0	1	1/4	13/4	$x_{2,a}$
1/4	1	1/2	-1/2	0	0	1/4	1/4	x_2
9/4	0	1/2	-3/2	0	0	5/4	-15/4	

x_4 entre et $x_{1,a}$ sort.

Tableau 3

x_1	x_2	x_3	x_4	$x_{1,a}$	$x_{1,a}$	$x_{3,a}$		
-7/2	0	0	1	1	0	-1/2	1/2	x_4
3	0	-1/2	0	-1/2	1	1/2	3	$x_{2,a}$
-3/2	1	1/2	0	1/2	0	0	1/2	x_2
-3	0	1/2	0	3/2	0	1/2	-3	

x_1 entre et $x_{2,a}$ sort.

Tableau 4

x_1	x_2	x_3	x_4	$x_{1,a}$	$x_{1,a}$	$x_{3,a}$		
0	0	-7/12	1	5/12	7/6	1/12	4	x_4
1	0	-1/6	0	-1/6	1/3	1/6	1	x_1
0	1	1/4	0	1/4	1/2	1/4	2	x_2
0	0	0	0	1	1	1	0	

Dans le dernier tableau, les trois variables ajoutées sont sorties de la base. Elles sont donc nulles, ce qui était l'objectif. Cela signifie que les variables qui sont maintenant dans la base constituent une solution à coordonnées positives pour le système des contraintes. On a donc trouvé un point de départ pour résoudre le problème de l'exercice. C'est le point de coordonnées (ici x_3 est nulle car elle est hors-base) :

$$\begin{cases} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 4 \end{cases}$$

On peut donc maintenant traiter le problème posé à partir du point trouvé. On commence par supprimer, dans le dernier tableau calculé, les colonnes des variables ajoutées :

x_1	x_2	x_3	x_4		
0	0	-7/12	1	4	x_4
1	0	-1/6	0	1	x_1
0	1	1/4	0	2	x_2

Dans ce tableau, on voit que les variables x_1, x_2 et x_4 sont dans la base et que la variable x_3 est hors-base. On peut l'interpréter comme le système de contraintes suivant :

$$\begin{cases} -\frac{7}{12}x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 - \frac{1}{6}x_3 &= 1 \\ x_2 + \frac{1}{4}x_3 &= 2 \end{cases}$$

La dernière ligne doit contenir la fonction objectif initiale $x_1 - x_2 + x_3$ mais celle-ci doit être exprimée, comme toujours, en fonction de la ou des variable(s) hors-base uniquement. Le système précédent permet facilement de tout exprimer en fonction de x_3. On trouve :

$$x_1 - x_2 + x_3 = -1 + \frac{17}{12}x_3$$

Le tableau du simplexe s'écrit donc

x_1	x_2	x_3	x_4		
0	0	-7/12	1	4	x_4
1	0	-1/6	0	1	x_1
0	1	1/4	0	2	x_2
0	0	-17/12	0	-1	

La variable x_3 entre et x_2 sort. Par pivot, on obtient le tableau suivant :

x_1	x_2	x_3	x_4		
0	7/3	0	1	26/3	x_4
1	2/3	0	0	7/3	x_1
0	4	1	0	8	x_3
0	17/3	0	0	31/3	

On est maintenant à l'optimum et la solution du problème est :

$$\begin{cases} x_1^* &= 7/3 \\ x_2^* &= 0 \\ x_3^* &= 8 \\ x_4^* &= 26/3 \end{cases}$$

La valeur à l'optimum est $f^* = 31/3$.

Programme 2

$$\begin{cases} \text{Max}\,(x_1 + 2x_2 + 3x_3) & & \\ x_1 + x_2 & \leq & 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 6 \\ 12x_1 + 8x_2 - 5x_3 & = & 32 \\ x_1, x_2 \text{ et } x_3 & \geq & 0 \end{cases}$$

Dans ce problème, la première contrainte est une inégalité, donc il faut commencer par introduire une variable d'écart x_4. On introduit ensuite les variables ajoutées comme dans l'exercice précédent. Le problème s'écrit sous la forme

$$\text{Max}\,(-x_{1,a} - x_{2,a} - x_{3,a})$$

avec le système de contraintes suivant :

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & & +x_4 + x_{1,a} & & & = & 5 \\ 2x_1 & +2x_2 & -x_3 & & +x_{2,a} & & = & 6 \\ 12x_1 & +8x_2 & -5x_3 & & & +x_{3,a} & = & 32 \end{cases}$$

avec $x_1, x_2, x_3, x_4, x_{1,a}, x_{2,a}, x_{3,a} \geq 0$.

La configuration de départ consiste à annuler les variables x_1, x_2, x_3, x_4 qui sont ainsi des variables hors-base. Les variables de base sont donc au départ :

$$\begin{cases} x_{1,a} & = 5 \\ x_{2,a} & = 6 \\ x_{3,a} & = 32 \end{cases}$$

Très important : il faut veiller à ce que la fonction objectif $(-x_{1,a} - x_{2,a} - x_{3,a})$ soit exprimée en fonction des variables hors-base. On doit donc, avant de commencer, extraire $x_{1,a}, x_{2,a}, x_{3,a}$ en fonction de x_1, x_2, x_3, x_4 et les remplacer dans la fonction objectif. On a :

$$\begin{cases} x_{1,a} & = & 5 - x_1 - x_2 - x_4 \\ x_{2,a} & = & 6 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_{3,a} & = & 32 - 12x_1 - 8x_2 + 5x_3 \end{cases}$$

D'où

$$-x_{1,a} - x_{2,a} - x_{3,a} = -43 + 15x_1 + 11x_2 - 6x_3 + x_4$$

À partir de là, la méthode du simplexe s'applique sans problèmes :

Tableau 1

x_1	x_2	x_3	x_4	$x_{1,a}$	$x_{1,a}$	$x_{3,a}$		
1	1	0	1	1	0	0	5	$x_{1,a}$
2	2	-1	0	0	1	0	6	$x_{2,a}$
12	8	-5	0	0	0	1	32	$x_{3,a}$
-15	-11	6	-1	0	0	0	-43	

x_1 entre et $x_{3,a}$ sort.

Tableau 2

x_1	x_2	x_3	x_4	$x_{1,a}$	$x_{1,a}$	$x_{3,a}$		
0	1/3	5/12	1	1	0	-1/12	7/3	$x_{1,a}$
0	2/3	-1/6	0	0	1	-1/6	2/3	$x_{2,a}$
1	2/3	-5/12	0	0	0	1/12	8/3	x_1
0	-1	-1/4	-1	0	0	5/4	-3	

x_2 entre et $x_{2,a}$ sort.

Tableau 3

x_1	x_2	x_3	x_4	$x_{1,a}$	$x_{1,a}$	$x_{3,a}$		
0	0	1/2	1	1	-1/2	0	2	$x_{1,a}$
0	1	-1/4	0	0	3/2	-1/4	1	x_2
1	0	-1/4	0	0	-1	1/4	2	x_1
0	0	-1/2	-1	0	3/2	1	-2	

x_4 entre et $x_{1,a}$ sort.

Tableau 4

x_1	x_2	x_3	x_4	$x_{1,a}$	$x_{1,a}$	$x_{3,a}$		
0	0	1/2	1	1	-1/2	0	2	x_4
0	1	-1/4	0	0	3/2	-1/4	1	x_2
1	0	-1/4	0	0	-1	1/4	2	x_1
0	0	0	0	1	1	1	0	

Dans le dernier tableau, les trois variables ajoutées sont sorties de la base. Elles sont donc nulles, ce qui était l'objectif. Cela signifie que les variables qui sont maintenant dans la base constituent une solution à coordonnées positives pour le système des contraintes. On a donc trouvé un point de départ pour résoudre le problème de l'exercice. C'est le point de coordonnées (ici x_3 est nulle car elle est hors-base) :

$$\begin{cases} x_1 & = 1 \\ x_2 & = 2 \\ x_3 & = 0 \\ x_4 & = 2 \end{cases}$$

On peut donc maintenant traiter le problème posé à partir du point trouvé. On commence par supprimer, dans le dernier tableau calculé, les colonnes des variables ajoutées :

x_1	x_2	x_3	x_4		
0	0	1/2	1	2	x_4
0	1	-1/4	0	1	x_2
1	0	-1/4	0	2	x_1

Dans ce tableau, on voit que les variables x_1, x_2 et x_4 sont dans la base et que la variable x_3 est hors-base. On peut l'interpréter comme le système de contraintes suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_3 + x_4 & = & 2 \\ x_2 - \frac{1}{4}x_3 & = & 1 \\ x_1 - \frac{1}{4}x_3 & = & 2 \end{cases}$$

La dernière ligne doit contenir la fonction objectif initiale $x_1 + 2x_2 + 3x_3$ mais celle-ci doit être exprimée, comme toujours, en fonction de la ou des variable(s) hors-base uniquement. Le système précédent permet facilement de tout exprimer en fonction de x_3 qui est ici l'unique variable hors-base. On trouve :

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 + \frac{15}{4}x_3$$

Le tableau du simplexe s'écrit donc

x_1	x_2	x_3	x_4		
0	0	1/2	1	2	x_4
0	1	-1/4	0	1	x_2
1	0	-1/4	0	2	x_1
0	0	-15/4	0	4	

La variable x_3 entre et x_4 sort. Par pivot, on obtient le tableau suivant :

x_1	x_2	x_3	x_4		
0	0	1	2	4	x_3
0	1	0	1/2	2	x_2
1	0	0	1/2	3	x_1
0	0	0	15/2	19	

On est maintenant à l'optimum et la solution du problème est :

$$\begin{cases} x_1^* &= 3 \\ x_2^* &= 2 \\ x_3^* &= 4 \\ x_4^* &= 0 \end{cases}$$

La valeur à l'optimum est $f^* = 19$.

Corrigé ex. 4 : Indices d'octane

On désigne par x_{1A} et x_{2A} (resp. x_{1B} et x_{2B}) le nombre de barils de P_1 et de P_2 utilisés pour fabriquer les essences $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$).

Indice d'octane des essences $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{I}_A = \frac{71x_{1A} + 99x_{2A}}{x_{1A} + x_{2A}}$$

$$\mathcal{I}_B = \frac{71x_{1B} + 99x_{2B}}{x_{1B} + x_{2B}}$$

Les contraintes s'écrivent : $\mathcal{I}_A \geq 96$ et $\mathcal{I}_B \geq 85$, ce qui conduit, après regroupement des termes, aux inégalités suivantes :

$$\begin{cases} 25x_{1A} - 3x_{2A} &\leq 0 \\ x_{1B} - x_{2B} &\leq 0 \end{cases}$$

Les containtes de disponibilité des ressources P_1 et P_2 s'écrivent comme ceci :

$$\begin{cases} x_{1A} + x_{1B} & \leq 3900 \\ x_{2A} - x_{2B} & \leq 5000 \end{cases}$$

La fonction objectif est :

$$\begin{aligned} f &= 3,75(x_{1A} + x_{2A}) + 2,75(x_{1B} + x_{2B}) \\ &+ 1,25(3900 - x_{1A} - x_{1B}) + 2,25(5000 - x_{2A} - x_{2B}) \\ &= 2,5x_{1A} + 1,5x_{2A} + 1,5x_{1B} + 0,5x_{2B} + 16125 \end{aligned}$$

Notons x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 les variables d'écart. Le tableau de départ de la méthode du simplexe s'écrit :

Tableau 1

x_{1A}	x_{2A}	x_{1B}	x_{2B}	x'_1	x'_2	x'_3	x'_4		
25	-3	0	0	1	0	0	0	0	x'_1
0	0	1	-1	0	1	0	0	0	x'_2
1	0	1	0	0	0	1	0	3900	x'_3
0	1	0	1	0	0	0	1	5000	x'_4
-2,5	-1,5	-1,5	-0,5	0	0	0	0	16125	

x_{1A} entre et x'_1 sort.

Tableau 2

x_{1A}	x_{2A}	x_{1B}	x_{2B}	x'_1	x'_2	x'_3	x'_4		
1	-3/25	0	0	1/25	0	0	0	0	x_{1A}
0	0	1	-1	0	1	0	0	0	x'_2
0	3/25	1	0	-1/25	0	1	0	3900	x'_3
0	1	0	1	0	0	0	1	5000	x'_4
0	-1,8	-1,5	-0,5	0,1	0	0	0	16125	

x_{2A} entre et x'_4 sort.

Tableau 3

x_{1A}	x_{2A}	x_{1B}	x_{2B}	x'_1	x'_2	x'_3	x'_4		
1	0	0	3/25	1/25	0	0	3/25	600	x_{1A}
0	0	1	-1	0	1	0	0	0	x'_2
0	0	1	-3/25	-1/25	0	1	-3/25	3300	x'_3
0	1	0	1	0	0	0	1	5000	x_{2A}
0	0	-1,5	1,3	0,1	0	0	1,8	25125	

x_{1B} entre et x'_2 sort.

Tableau 4

x_{1A}	x_{2A}	x_{1B}	x_{2B}	x'_1	x'_2	x'_3	x'_4		
1	0	0	3/25	1/25	0	0	3/25	600	x_{1A}
0	0	1	-1	0	1	0	0	0	x_{1B}
0	0	0	22/25	-1/25	-1	1	-3/25	3300	x'_3
0	1	0	1	0	0	0	1	5000	x_{2A}
0	0	0	-0,2	0,1	1,5	0	1,8	25125	

x_{2B} entre et x'_3 sort.

Tableau 5

x_{1A}	x_{2A}	x_{1B}	x_{2B}	x'_1	x'_2	x'_3	x'_4		
1	0	0	0	1/22	3/22	-3/22	3/22	150	x_{1A}
0	0	1	0	-1/22	-3/22	25/22	-3/22	3750	x_{1B}
0	0	0	1	-1/22	-25/22	25/22	-3/22	3750	x_{2B}
0	1	0	0	1/22	25/22	-25/22	25/22	1250	x_{2A}
0	0	0	0	1/11	14/11	2,5/11	19,5/11	25875	

On est maintenant à l'optimum. La solution est

$$\begin{cases} x^*_{1A} & = 150 \\ x^*_{2A} & = 1250 \\ x^*_{1B} & = 3750 \\ x^*_{2B} & = 3750 \\ f^* & = 25875 \end{cases}$$

On fabrique donc 1400 ($= 150+1250$) barils d'essence $\mathcal{A}$ et 7500 ($= 3750+3750$) barils d'essence $\mathcal{B}$.

Les quatre variables d'écart sont nulles, ce qui signifie que les quatre contraintes sont saturées : il n'y a aucun reliquat de produits P_1 et P_2 et les indices d'octane obtenus sont respectivement de 96 et 85.

Corrigé ex. 5 : Fabrique de pièces détachées

On désigne par x_1 et x_2 le nombre de lots de 100 pièces de type A et B respectivement.

Les contraintes de disponibilité des trois ateliers conduisent aux inéquations suivantes :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & \leq 200 \\ x_1 + 4,5x_2 & \leq 540 \\ 4x_1 + 3x_2 & \leq 480 \end{cases}$$

Si on note x_3, x_4, x_5 les variables d'écart, les contraintes deviennent :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 & = 200 \\ x_1 + 4,5x_2 + x_4 & = 540 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_5 & = 480 \end{cases}$$

La marge sur coût variable unitaire réalisée pour les lots de type A, compte-tenu du nombre d'unités d'oeuvre requis et de leur coût de fabrication, est :

$$c_1 = 138 - [(10 \times 2) + (12 \times 1) + (14 \times 4)] = 50$$

Pour les lots de type B, on obtient de même :

$$c_2 = 136 - [(10 \times 1) + (12 \times 4,5) + (14 \times 3)] = 30$$

La marge totale est $c_1x_1 + c_2x_2$. On cherche donc à maximiser la marge :

$$\text{Max}\ (50x_1 + 30x_2)$$

Le premier tableau du simplexe est donc :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
2	1	1	0	0	200	x_3
1	4,5	0	1	0	540	x_4
4	3	0	0	1	480	x_5
-50	-30	0	0	0	0	

La variable x_1 entre dans la base. On forme les rapport positifs entre la colonne de droite et la colonne entrante et on cherche le plus petit :

$$\text{Min}\Big(\frac{200}{2}, \frac{540}{1}, \frac{480}{4}\Big) = \frac{200}{2} = 100$$

C'est donc la variable x_3 qui sort et on fait une transformation du pivot autour du nombre 2 (à l'intersection de la ligne de x_3 et de la colonne de x_1).

On obtient le tableau suivant :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	1/2	1/2	0	0	100	x_1
0	4	-1/2	1	0	440	x_4
0	1	-2	0	1	80	x_5
0	-5	25	0	0	5000	

La variable x_2 entre maintenant dans la base. Puis :

$$\text{Min}\Big(\frac{100}{1/2}, \frac{440}{4}, \frac{80}{1}\Big) = 80$$

donc la variable x_5 sort et on fait une transformation du pivot autour du nombre 1 (à l'intersection de la ligne de x_5 et de la colonne de x_2).

on obtient, après pivot, le tableau suivant :

0	0	15/2	1	-4	120	x_4
0	1	-2	0	1	80	x_2
0	0	15	0	5	5400	

C'est l'optimum. La solution est donc :

$$\begin{cases} x_1^* & = 60 \\ x_2^* & = 80 \\ x_3^* & = 0 \\ x_4^* & = 120 \\ x_5^* & = 0 \\ f^* & = 5400 \end{cases}$$

La première et la troisième contrainte sont saturées, autrement dit les atelier T et M sont utilisés à plein, tandis que dans l'atelier F il reste 120 unités d'oeuvre inutilisées.

Corrigé ex. 6 : Plan de production de moteurs

	Temps opératoire unitaire pour le modèle A	Temps opératoire unitaire pour le modèle B	Temps disponible (en heures)	Coût variable de l'heure
Emboutissage	50 mn	40 mn	2500 h	150 €
Soudure	30 mn	20 mn	1000 h	60 €
Peinture	20 mn	10 mn	800 h	20 €

Les prix de vente sont fixés à 215 € pour le modèle A et 150 € pour le modèle B.

On désigne par x_1 et x_2 les quantités de moteurs des deux types A et B qui vont être produites.

Calculons les marges bénéficiaires résultant de ces fabrications. Pour le modèle A, le prix de vente unitaire est de 215 et on doit retirer les coûts de fabrication qui dépendent du temps passé dans les trois ateliers (attention les temps sont en minutes et les coûts sont exprimés à l'heure). On trouve donc :

$$c_1 = 215 - (50 \times 150 + 30 \times 60 + 20 \times 30)/60 = 50$$

De même pour les moteurs de type B on obtient :

$$c_1 = 150 - (40 \times 150 + 20 \times 60 + 10 \times 30)/60 = 25$$

L'objectif est de maximiser la marge totale :

$$\mathrm{Max}(50\,x_1 + 25\,x_2)$$

Il y a des contraintes de disponibilité qui s'expriment de la manière suivante (en mettant tous les temps en minutes) :

$$\begin{cases} 50x_1 + 40x_2 & \leq 2500 \times 60 \\ 30x_1 + 20x_2 & \leq 1000 \times 60 \\ 20x_1 + 10x_2 & \leq 800 \times 60 \end{cases}$$

Il y a d'autre part une contrainte de marché qui impose un quota maximal sur le nombres de moteurs de type A :

$$x_1 \leq 1800$$

On introduit des variables d'écart x_3, x_4, x_5, x_6 dans les quatre contraintes :

$$\begin{cases} 50x_1 & +40x_2 & +x_3 & & & & = 2500 \times 60 \\ 30x_1 & +20x_2 & & +x_4 & & & = 1000 \times 60 \\ 20x_1 & +10x_2 & & & +x_5 & & = 800 \times 60 \\ x_1 & & & & & +x_6 & = 1800 \end{cases}$$

Le tableau de démarrage du simplexe s'écrit comme ceci :

Tableau 1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
60	40	1	0	0	0	150000	x_3
30	20	0	1	0	0	60000	x_4
20	10	0	0	1	0	48000	x_5
1	0	0	0	0	1	1800	x_6
-50	-25	0	0	0	0	0	

La variable x_1 entre dans la base et la variable x_6 en sort car :

$$\text{Min}\Big(\frac{150000}{60}, \frac{60000}{30}, \frac{48000}{20}, \frac{1800}{1}\Big) = 1800$$

Tableau 2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	40	1	0	0	-60	42000	x_3
0	20	0	1	0	-30	6000	x_4
0	10	0	0	1	-20	12000	x_5
1	0	0	0	0	1	1800	x_1
0	-25	0	0	0	50	90000	

Maintenant la variable x_2 entre dans la base et la variable x_4 en sort car :

$$\text{Min}\Big(\frac{42000}{40}, \frac{6000}{20}, \frac{12000}{10}\Big) = \frac{6000}{20} = 300$$

Tableau 3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	0	1	-2	0	0	30000	x_3
0	1	0	0,05	0	-1,5	300	x_2
0	0	0	-0,5	1	-5	9000	x_5
1	0	0	0	0	1	1800	x_1
0	0	0	1,25	0	12,5	97500	

On a atteint l'optimum. La solution est :

$$\begin{cases} x_1^* &= 1800 \\ x_2^* &= 300 \\ x_3^* &= 30000 \\ x_5^* &= 9000 \\ x_6^* &= 0 \\ f^* &= 97500 \end{cases}$$

La deuxième et la quatrième contrainte sont saturées : les valeurs 1,25 et 12,5 dans la dernière ligne du tableau sont les prix duaux π_4 et π_6 associés. On fabrique le maximum envisagé de moteurs de type A et l'atelier de soudure fonctionne à plein. Le premier atelier (emboutissage) est sous-utilisé : il reste 500 (=30000/60) heures disponibles. De même, dans le troisième atelier, il reste 9000/60=150 heures disponibles.

Corrigé ex. 7 : Excavation et matériaux de carrière

On désigne par x_1 et x_2 les quantités qui seront extraites des deux carrières. La redevance à acquitter est de $19,40 \times 10^3 x_1 + 20 \times 10^3 x_2$ et on cherche à la minimiser. Pour simplifier les calculs, on divise les coefficients par 10^3, d'où le problème :

$$\mathrm{Min}\,(19,40x_1 + 20x_2)$$

Les rendements liés au concassage des matériaux conduisent aux inéquations suivantes qui expriment que les quantités obtenues doivent pouvoir couvrir les besoins imposés par le contrat :

$$\begin{cases} 0,36 \times 10^3 x_1 + 0,45 \times 10^3 x_2 & \geq 13500 \\ 0,40 \times 10^3 x_1 + 0,20 \times 10^3 x_2 & \geq 11200 \\ 0,16 \times 10^3 x_1 + 0,10 \times 10^3 x_2 & \geq 5000 \end{cases}$$

Ces inéquations peuvent être réécrites de la manière suivante :

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 & \geq 150 \\ 2x_1 + x_2 & \geq 56 \\ 8x_1 + 5x_2 & \geq 250 \end{cases}$$

Elles montrent en particulier qu'on ne peut pas démarrer le simplexe à partir de l'origine $(0,0)$. En renversant le sens des inégalités et en introduisant les variables d'écart, on obtient :

$$\begin{cases} -4x_1 & -5x_2 & +x_3 & & & = -150 \\ -2x_1 & -x_2 & & +x_4 & & = -56 \\ -8x_1 & -5x_2 & & & +x_5 & = -250 \end{cases}$$

Il existe des méthodes pour trouver un point de démarrage pour le simplexe : cela revient, une fois qu'on a introduit les variables d'écart, à résoudre un système d'équations linéaires en coordonnées positives. Une des méthodes possibles est la *méthode des valeurs ajoutées* (mais on ne l'utilisera pas ici).

Dans le cas particulier de cet exercice, on peut se contenter plus simplement de déterminer un point valide sur l'un des axes. Par exemple, si on regarde les intersections des contraintes avec l'axe vertical ($x_1 = 0$), on trouve les valeurs 30, 50, 56. Comme le domaine se trouve au-dessus de ces points, on choisit le point de coordonnées $(0, 56)$ comme point de départ. On peut vérifier qu'il satisfait effectivement les trois contraintes : il est sur la droite de la deuxième contrainte, donc $x_4 = 0$.

On part donc de la situation suivante :

$$\begin{cases} x_1 = 0 & x_4 = 0 \\ x_2 = 56 & x_3 = 130 & x_5 = 30 \end{cases}$$

Les variables x_1 et x_4 sont des variables hors-base. On doit donc exprimer les autres variables en fonction de celles-ci. On obtient :

$$\begin{cases} x_2 & = & 56 - 2x_1 + x_4 \\ x_3 & = & 130 - 6x_1 + 5x_4 \\ x_5 & = & 30 - 2x_1 + 5x_4 \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & & -x_4 & & = & 56 \\ 6x_1 & & +x_3 & -5x_4 & & = & 130 \\ 2x_1 & & & -5x_4 & +x_5 & = & 30 \end{cases}$$

De même la fonction objectif s'écrit, en fonction de x_1 et x_4, comme ceci :

$$f = 1120 - 20,6x_1 + 20x_4$$

On change son signe pour transformer le problème de minimisation en une maximisation :

$$\text{Max}\,(20,6x_1 - 20x_4 - 1120)$$

Le premier tableau du simplexe sera finalement :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
2	1	0	-1	0	56	x_2
6	0	1	-5	0	130	x_3
2	0	0	-5	1	30	x_5
-20,6	0	0	20	0	-1120	

La variable x_1 entre et la variable x_5 sort car :

$$\text{Min}\Big(\frac{56}{2}, \frac{130}{6}, \frac{30}{2}\Big) = \frac{30}{2} = 15$$

Le pivot conduit au tableau suivant :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	1	0	4	-1	26	x_2
0	0	1	10	-3	40	x_3
1	0	0	-5/2	1/2	15	x_1
0	0	0	-31,5	10,3	-811	

On fait maintenant entrer la variable x_4 et sortir la variable x_3 car :

$$\text{Min}\Big(\frac{26}{4}, \frac{40}{10}\Big) = 4$$

Le pivot se fait autour de la valeur 10 (à l'intersection de la ligne de x_3 et de la colonne de x_4). On aboutit au tableau suivant :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	1	-2/5	0	1/5	10	x_2
0	0	1/10	1	-3/10	4	x_4
1	0	1/4	0	-1/4	25	x_1
0	0	3,15	0	0,85	-685	

Ce tableau correspond à l'optimum. La solution est donc :

$$\begin{cases} x_1^* & = 25 \\ x_2^* & = 10 \\ x_3^* & = 0 \\ x_4^* & = 4 \\ x_5^* & = 0 \end{cases}$$

En rétablissant le signe de f et le facteur 10^3, on obtient :

$$f^* = 685000$$

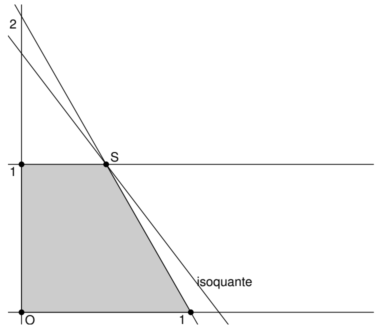

FIGURE 1 – Résolution graphique

2 Dualité

Corrigé ex. 8 : Main d'oeuvre et équipements

$$\begin{cases} \text{Max}\,\{3/2\,x_1 + x_2\} \\ 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_2 \leq 1 \\ x_1 \text{ et } x_2 \geq 0 \end{cases}$$

8-1)
En introduisant des variables d'écart, les contraintes s'écrivent :

$$\begin{array}{lllll} 2x_1+ & x_2 & +x_3 & & = 2 \\ & x_2 & & +x_4 & = 1 \end{array}$$

La résolution graphique est représentée sur la figure 1. La solution est au point S qui a pour coordonnées $(1/2, 1)$.

Les deux contraintes sont saturées donc, à l'optimum, les variables x_1 et x_2 sont dans la base et les variables d'écart x_3 et x_4 sont hors-base. D'où $I = \{1, 2\}$ et le complémentaire $\bar{I} = \{3, 4\}$.

Matriciellement, on peut écrire le programme sous la forme :

$$\begin{cases} \text{Max}\, c.x \\ Bx = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

avec

$$c = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans cette notation, le vecteur des prix duaux s'écrit

$$\boxed{\pi(I) = c^I (B^I)^{-1}} \tag{1}$$

et par conséquent

$$\pi(I) = (3/2 \quad 1)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}(3/2 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = (3/4 \quad 1/4)$$

Les prix duaux sont donc $\pi_1 = 3/4$ et $\pi_2 = 1/4$.

8-2)

Dans la situation précédente, on a $b_1 = 2$ et $b_2 = 1$. La question consiste à se demander dans quelle mesure on peut modifier b_1 et b_2 (c'est-à-dire faire bouger les droites des deux contraintes) sans changer de base à l'optimum, autrement dit sans changer la forme du domaine réalisable.

D'après le graphique, si b_1 est fixe, on voit qu'on peut faire augmenter b_2 jusqu'à 2 (qui est en fait la valeur de b_1). Au contraire, si b_2 est fixe, on voit qu'on peut faire augmenter b_1 indéfiniment mais que si on le fait diminuer on ne peut aller que jusquà la valeur 1 (qui est en fait la valeur de b_2). On en conclue que la base reste inchangée tant que l'on maintient l'inégalité $b_2 \leq b_1$.

8-3)

La marge optimale est exprimée par la formule

$$f^* = \pi_1 b_1 + \pi_2 b_2$$

les variations de f s'écrivent donc

$$\Delta f = \pi_1 \Delta b_1 + \pi_2 \Delta b_2$$

Par conséquent, si b_1 est constant, $\Delta f = \pi_2 \Delta b_2$ et, si b_2 est constant, $\Delta f = \pi_1 \Delta b_1$.

8-4)

Le prix d'usage p_2 est le coût unitaire d'utilisation de l'équipement. Donc si b_2 varie d'une unité, on doit payer p_2 tandis que la marge augmente de π_2. Ce n'est rentable que si $p_2 < \pi_2$, ce qui est bien le cas puisque p_2 vaut 0.2 et que π_2 vaut 1/4=0.25.

En revanche si p_2 vaut 0.4, une augmentation des capacités d'équipement ne sera pas rentable puisque $0.4 > 0.25$ (cela coûterait plus que ça ne rapporte).

8-5)

On augmente maintenant simultanément les deux contraintes mais en maintenant le rapport $\Delta b_1 = 2\,\Delta b_2$.

Le prix d'usage est $P = p_1 \Delta b_1 + p_2 \Delta b_2 = (2p_1 + p_2)\Delta b_2$.

D'autre part $\Delta f = \pi_1 \Delta b_1 + \pi_2 \Delta b_2 = (2\pi_1 + \pi_2)\Delta b_2$.

Une telle évolution n'est profitable que si $P < \Delta f$. La condition est donc

$$2p_1 + p_2 < 2\pi_1 + \pi_2$$

Cette condition est valable quelle que soit l'échelle des extensions, car tant que le rapport entre b_1 et b_2 reste inchangé, on maintient la relation $b_2 \leq b_1$ trouvée à la question 2 qui est la condition pour que les prix duaux trouvés restent valides.

Corrigé ex. 9 : Trois techniques de production

9-1)

En appelant x_1, x_2 et x_3 les quantités de bien fabriquées selon l'une des trois techniques, le programme d'optimisation s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{Max}\,\{3x_1 + 4x_2 + 5x_3\} \\ 0,5\,x_1 + 1,5\,x_2 + 2\,x_3 \leq 12 \\ 2\,x_1 + 1,5\,x_2 + 0,5\,x_3 \leq 15 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

9-2)

On introduit des variables d'écart x_4 et x_5 :

$$\begin{array}{llllll} 0,5\,x_1 & +1,5\,x_2 & +2\,x_3 & +x_4 & & = 12 \\ 2\,x_1 & +1,5\,x_2 & +0,5\,x_3 & & +x_5 & = 15 \end{array}$$

Le premier tableau du simplexe s'écrit

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0,5	1,5	2	1	0	12	x_4
2	1,5	0,5	0	1	15	x_5
-3	-4	-5	0	0	0	

On fait entrer x_3 dans la base.

$$\text{Min}\left(\frac{12}{2}, \frac{15}{0,5}\right) = 6$$

Donc x_4 est la variable sortante.

Après pivot, on obtient le tableau suivant :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0,25	0,75	1	0,5	0	6	x_3
1,875	1,125	0	-0,25	1	12	x_5
-1,75	-0,25	0	2,5	0	30	

On fait maintenant entrer x_1 dans la base.

$$\text{Min}\left(\frac{6}{0,25}, \frac{12}{1,875}\right) = \frac{12}{1,875} = 6,4$$

Donc x_5 est la variable sortante.

Le tableau suivant est :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	0,6	1	0,533	-0,133	4,4	x_3
1	0,6	0	-0,133	0,533	6,4	x_1
0	0,8	0	2,267	0,933	41,2	

C'est l'optimum :

$$\begin{cases} x_1^* &= 6,4 = 96/15 \\ x_2^* &= 0 \\ x_3^* &= 4,4 = 66/15 \\ x_4^* &= 0 \\ x_5^* &= 0 \end{cases}$$

et la valeur à l'optimum est $f^* = 41,2$.

9-3)

Pour écrire qu'il faut satisfaire une demande de 10 unités au moins, on doit rajouter la contrainte

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 10$$

Or, avec la solution optimale, on a $x_1 + x_2 + x_3 = 10,8$, autrement dit cette contrainte est satisfaite dans les conditions précédentes. Elle n'ajoute donc rien et ne modifie pas la solution : c'est une contrainte non saturée.

9-4)

On considère le sommet de coordonnées $(96/15, 0, 66/15, 0, 0)$. On sait déjà qu'il est optimal puisque c'est la solution trouvée par le simplexe. On va cependant le vérifier au moyen des conditions d'optimalité.

La base à l'optimum est $I = \{1, 3\}$ et le complémentaire est $\bar{I} = \{2, 4, 5\}$. Le critère d'optimalité s'écrit matriciellement (en reprenant la même notation qu'à l'exercice précédent) :

$$\boxed{c^{\bar{I}} - c^I.(B^I)^{-1}.B^{\bar{I}} \leq 0} \tag{2}$$

On a ici

$$c = (3 \quad 4 \quad 5 \quad 0 \quad 0)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0,5 & 1,5 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1,5 & 0,5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent

$$c^I = (3 \quad 5) \qquad c^{\bar{I}} = (4 \quad 0 \quad 0) \qquad B^I = \begin{pmatrix} 0,5 & 2 \\ 2 & 0,5 \end{pmatrix} \qquad B^{\bar{I}} = \begin{pmatrix} 1,5 & 1 & 0 \\ 1,5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule l'expression (2) :

$$(4 \quad 0 \quad 0) - (3 \quad 5)\begin{pmatrix} 0,5 & 2 \\ 2 & 0,5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1,5 & 1 & 0 \\ 1,5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-4/5 \quad -34/15 \quad -14/15)$$

C'est bien un vecteur strictement négatif.

Corrigé ex. 10 : Production en heures-machines

10-1) Calcul des marges sur coût variable unitaires pour les deux produits P_1 et P_2.

On évalue les données en fonction des résultats du dernier exercice mensuel. La fabrication du produit P_1 a requis 650 heures-machines dans l'atelier d'usinage alors que celle du produit P_2 en a requis 350. Le produit P_1 utilise 650/(650+350)=65% du temps de l'atelier d'usinage. Les coûts variables dans cet atelier ont été de 80000, donc le coût correspondant au produit P_1 est de 80000×0.65. Comme il a été fabriqué 5000 pièces de P_1, on a finalement un coût unitaire de

$$\frac{80000}{5000} \times 0.65 = 10.4.$$

De la même manière, on calcule le coût unitaire pour le produit P_2 dans l'atelier d'usinage comme ceci :

$$\frac{80000}{7000} \times 0.35 = 4.$$

On calcule de même les coûts unitaires dans l'atelier de finition. La fabrication du produit P_1 a requis 150 heures-machines dans l'atelier de finition alors que celle du produit P_2 en a requis 350. Le produit P_1 utilise 150/(150+350)=30% du temps de l'atelier de finition. Les coûts variables dans cet atelier ont été de 50000, donc le coût correspondant au produit P_1 est de 50000×0.30. Comme il a été fabriqué 5000 pièces de P_1, on a finalement un coût unitaire de

$$\frac{50000}{5000} \times 0.30 = 3.$$

De la même manière, on calcule le coût unitaire pour le produit P_2 dans l'atelier de finition comme ceci :

$$\frac{50000}{7000} \times 0.70 = 5.$$

Compte-tenu des autres coûts imputés directement aux produits, la marge sur coût variable du produit P_1 est finalement :

$$m_1 = 50 - 12 - 10.4 - 3 = 24.6$$

Celle du produit P_2 est :

$$m_2 = 30 - 5.8 - 4 - 5 = 15.2$$

0-1) On désigne par x_1 et x_2 les quantités respectives de produits P_1 et P_2 fabriqués. La marge sur coûts variables totale sera de :

$$f = 24.6x_1 + 15.2x_2$$

Le nombre d'heures-machines, au cours du dernier exercice mensuel, a été de 650 pour 5000 pièces de P_1 produites dans l'atelier d'usinage. Chaque unité de P_1 a donc nécessité $\frac{650}{5000}$ heures-machines dans l'atelier d'usinage. Dans l'atelier de finition, le nombre d'heures-machines par pièce P_1 a été de $\frac{150}{5000}$. On calcule de même, le nombre d'heures-machines pour P_2.

Les capacités de production mesurées en heures-machine sont de 1100 pour la division usinage et de 550 pour la division finition. Cela conduit aux contraintes suivantes pour chacun des deux ateliers respectivement :

$$\begin{cases} \frac{650}{5000}x_1 + \frac{350}{7000}x_2 & \leq 1100 \\ \frac{150}{5000}x_1 + \frac{350}{7000}x_2 & \leq 550 \end{cases}$$

Le programme d'optimisation est finalement :

$$\begin{cases} \text{Max}\,(24.6\,x_1 + 15.2\,x_2) \\ 0.13\,x_1 + 0.05\,x_2 \leq 1100 \\ 0.03\,x_1 + 0.05\,x_2 \leq 550 \end{cases}$$

Pour déterminer *graphiquement* la solution de ce programme, il faut placer les droites des deux contraintes et représenter les isoquantes de la fonction-objectif.

Les pentes des deux contraintes sont respectivement de -0.13/0.05=-2.6 pour la première et -0.03/0.05=-0.6 pour la seconde. D'autre part, la pente des isoquantes est $-24.6/15.2 \approx -1.618$. Comme elle est comprise entre les pentes des deux contraintes, la solution se trouve à l'intersection de ces deux contraintes. C'est donc le point solution du système suivant :

$$\begin{cases} 0.13\,x_1 + 0.05\,x_2 = 1100 \\ 0.03\,x_1 + 0.05\,x_2 = 550 \end{cases}$$

On trouve

$$\begin{cases} x_1^* &= 5500 \\ x_2^* &= 7700 \end{cases}$$

La valeur de la fonction objectif en ce point optimal est $f = 252340$.

10-2) Les conditions d'optimalité s'écrivent :

$$\begin{gathered} \pi_1(0.13\,x_1 + 0.05\,x_2 - 1100) = 0 \\ \pi_2(0.03\,x_1 + 0.05\,x_2 - 550) = 0 \\ x_1(24.6 - 0.13\pi_1 - 0.03\pi_2) \\ x_2(15.2 - 0.05\pi_1 - 0.05\pi_2) \end{gathered}$$

Comme on sait que x_1 et x_2 sont non nuls, on en déduit le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} 24.6 - 0.13\pi_1 - 0.03\pi_2 &= 0 \\ 15.2 - 0.05\pi_1 - 0.05\pi_2 &= 0 \end{cases}$$

On le résout et on trouve :

$$\begin{cases} \pi_1 &= 154.8 \\ \pi_2 &= 149.2 \end{cases}$$

10-3) La formule exprimant la marge totale en fonction des prix duaux est $\pi_1 b_1 + \pi_2 b_2$. On trouve ici :

$$\pi_1 b_1 + \pi_2 b_2 = 154.8 \times 1100 + 149.2 \times 550 = 252340.$$

On retrouve bien la valeur à l'optimum obtenue à la question précédente. Tant qu'on ne change pas de base pour la solution, les prix duaux restent constants et la répartition de la marge entre les deux divisions principales se fait au *prorata* des heures-machines disponibles dans les deux ateliers.

10-4) Les prix d'usage par heure-machine r_1 et r_2 des deux divisions sont les frais fixes supportés, rapportés à l'heure-machine.

On fait porter le coût de la division d'administration à part égale sur les deux ateliers. L'atelier d'usinage supporte ainsi des frais fixes de $60000 + 25000 = 85000$

pour un nombre d'heures-machines de fonctionnement de $650 + 350 = 1000$. Le prix d'usage sera donc de $r_1 = 85$.

Pour l'atelier de finition, on trouve de même $40000 + 25000 = 65000$ pour un nombre d'heures-machines de fonctionnement de $150 + 350 = 500$. Le prix d'usage sera donc de $r_2 = 65000/500 = 130$.

0-2) En comparant les prix d'usage avec les prix duaux, on se rend compte qu'une augmentation de capacité dans l'atelier d'usinage ou dans l'atelier de finition sera profitable car $r_1 < \pi_1$ et $r_2 < \pi_2$.