Université AMO de Bouira
Faculté des sciences et sciences appliquées
Département d'Informatique

Module: Programmation linéaire
Filière \ Année : MI \ S5 \ 2022-2023
Chargée cours: Mme Aliouat
Durée : 1h 30

Examen

Exercice 1: 10 pts

On considère le cas d'un fabricant d'automobiles qui propose deux modèles à la vente, des grosses voitures et des petites voitures. Les voitures de ce fabriquant sont tellement à la mode qu'il est certain de vendre tout ce qu'il parvient à produire, au moins au prix catalogue actuel de 16000 euros pour les grosses voitures, et 10000 euros pour les petites voitures. Son problème vient de l'approvisionnement limité en deux matières premières, le caoutchouc et l'acier. La construction d'une petite voiture nécessite l'emploi d'une unité de caoutchouc et d'une unité d'acier, tandis que celle d'une grosse voiture nécessite une unité de caoutchouc mais deux unités d'acier. Sachant que son stock de caoutchouc est de 400 unités et son stock d'acier de 600 unités, combien doit-il produire de petites et de grosses voitures au moyen de ces stocks afin de maximiser son chiffre d'affaire ?

1. Modéliser ce problème par un PL1
2. Résoudre graphiquement ce problème puis déterminer le nombre des petites et de grosses voitures à produire ainsi que la valeur de chiffre d'affaire
3. Déduire deux solutions de base réalisable à partir de la résolution graphique en précisant les variables de base et hors base

Supposons maintenant que le fabricant d'automobile possède un concurrent qui, pour honorer des commandes en trop grand nombre, se propose de lui racheter tous ses stocks. Ce dernier doit faire une offre de prix (disons u) pour chaque unité de caoutchouc et une offre de prix (disons v) pour chaque unité d'acier. Pour que l'offre soit acceptée, il faut que le prix payé par le concurrent soit au moins égal à ce que le fabriquant pourrait en tirer en produisant des voitures.

4. Modéliser le problème de concurrent par un PL2
5. Existe-t-elle une solution optimale pour le problème de concurrent ? justifier ta réponse sans faire la résolution de PL2
6. Déduire la valeur minimale de prix global payé par le concurrent

Exercice 02 (10 pts) : Considérons le problème linéaire suivant :

$$(1)\quad \begin{array}{ll} \max & Z = 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ & 3x_1 - x_2 + x_3 = 7 \\ & x_1 + 3x_3 \leq 8 \\ & x_3 \leq 2 \\ & x_1 \in R,\ x_2 \in R^+,\ x_3 \in R^+ \end{array}$$

1. Écrire le problème (1) sous forme standard
2. Résoudre le problème (1)
3. Écrire le problème Dual noté(D) du problème (1).
4. Déduire la valeur optimale de la fonction objective de (D).

Corrigé type programmation linéaire

Examen 2023

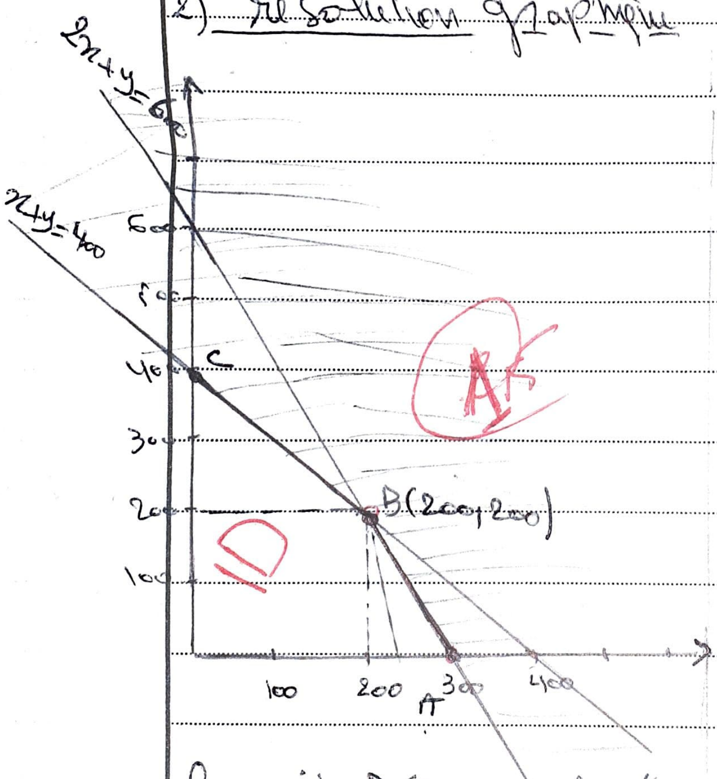
Exo1

1) Modéliser le problème

x, y : le nombre de grosses et petites voitures respectivement.

$$PL_1 \begin{cases} \text{Max } Z : 16000x + 10000y \\ x + y \leq 400 \rightarrow \text{contrainte caoutchouc} \\ 2x + y \leq 600 \rightarrow \text{contrainte acier} \\ x \geq 0 \; ; \; y \geq 0 \rightarrow \text{contrainte logique} \end{cases}$$

2) résolution graphique



le point B(200, 200) est le point optimale ⇒

- nbr de grosse voiture = 200
- nbr de petite voiture = 200.
- valeur chiffre affaire ; 5200000

4) Modéliser prob concurrent Dual de PL1

$$PL_2 \begin{cases} \text{Min } P = 400u + 600v \\ u + v \geq 10.000 \\ u + 2v \geq 16.000 \\ u \geq 0 \; , \; v \geq 0 \end{cases}$$

5) oui, il existe une solution optimale pour le prob PL_2 car PL_2 est le dual de PL_1 et PL_1 admet une solution optimale.

6) le prix global payé par le concurrent = 5200000 euro.

3) deux solution de base réalisable.

$B_{(3,4)}$ $(\underbrace{x, y}_{\text{hors base}}, \underbrace{e_1, e_2}_{\text{v. base}})$

$$S_{B(3,4)} = \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \end{pmatrix}$$

$B_{(1,2)}$ $(\underbrace{x, y}_{\text{v. base}}, \underbrace{e_1, e_2}_{\text{hors base}})$

$$S_{B(1,2)} = \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \end{pmatrix}$$

exo2

$$(1)\begin{cases} \text{Max}\, z : 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 3x_3 \leq 8 \\ x_3 \leq 2 \\ x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \in \mathbb{R}^+,\ x_3 \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

1) Forme standard

$x_1 \in \mathbb{R}$, on fait changement de variable

$x_1 = z_1 - z_2$, $z_1 \geq 0, z_2 \geq 0$

(1) stand

$$\begin{cases} \text{Max}\, z : 3z_1 - 3z_2 + x_2 - 2x_3 \\ z_1 - z_2 + 2x_2 - x_4 = 10 \\ 3z_1 - 3z_2 - x_2 + x_3 = 7 \\ z_1 - z_2 + 3x_3 + x_5 = 8 \\ x_3 + x_6 = 2 \\ z_1, z_2, x_3, x_2, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

2) Résoudre (1) par la méthode des deux phases

la forme auxiliaire associée

$$\begin{cases} \text{Min}\, w : u_1 + u_2 \\ z_1 - z_2 + 2x_2 - x_4 + u_1 = 10 \\ 3z_1 - 3z_2 - x_2 + x_3 + u_2 = 7 \\ z_1 - z_2 + 3x_3 + x_5 = 8 \\ x_3 + x_6 = 2 \end{cases}$$

$u_1 = 10 + x_4 - 2x_2 + z_2 - z_1$

$u_2 = 7 - x_3 + x_2 + 3z_2 - 3z_1$

$\text{Min}\, w = 17 + x_4 - x_3 - x_2 + 4z_2 - 4z_1$

$\text{Max}\, w = -x_4 + x_3 + x_2 - 4z_2 + 4z_1 - 17$

	z_1	z_2	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	u_2	b
u_1	1	-1	2	0	-1	0	0	1	0	10
u_2	3	-3	-1	1	0	0	0	0	1	7
x_5	1	-1	0	3	0	1	0	0	0	8
x_6	0	0	0	1	0	0	1	0	0	2
Max w	4	-4	1	1	-1	0	0	0	0	17

base	z_1	z_2	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	u_2	b
u_1	0	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{-1}{3}$	-1	0	0	1	$\frac{-1}{3}$	$\frac{23}{3}$
z_1	1	-1	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$
x_5	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	0	1	0	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{17}{3}$
x_6	0	0	0	1	0	0	1	0	0	2
Max W	0	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{-1}{3}$	-1	0	0	0	$\frac{-4}{3}$	$\frac{23}{3}$

	z_1	z_2	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	u_2
x_2	0	0	1	$\frac{-1}{7}$	$\frac{-3}{7}$	0	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{-1}{7}$
z_1	1	-1	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{-1}{7}$	0	0	[illegible]	[illegible]
x_5	0	0	0	$\frac{19}{7}$	$\frac{1}{7}$	1	0	$\frac{-1}{7}$	$\frac{-2}{7}$
x_6	0	0	0	1	0	0	1	0	0
max W	0	0	0	0	0	0	0	[illegible]	-1

le critère d'optimalité est vérifié base (x_2, z_1, x_5, x_6).

$\max W = 0 \Rightarrow \text{Min}\, W = 0$.

$\Rightarrow$ phase II

PL phase 2

$$\begin{cases} x_2 - \frac{1}{7}x_3 - \frac{3}{7}x_4 = \frac{23}{7} \\ z_1 - z_2 + \frac{2}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4 = \frac{24}{7} \\ \frac{19}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_4 + x_5 = \frac{32}{7} \\ x_3 + x_6 = 2 \\ \text{Max}\, z : 3z_1 - 3z_2 + x_2 - 2x_3 \end{cases}$$

Max z : 23

$$\boxed{Max\ Z = \frac{95}{7} + \frac{6}{7}x_4 - \frac{19}{7}x_3}$$

	z_1	z_2	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_2	0	0	1	$\frac{-1}{7}$	$\frac{-3}{7}$	0	0	$\frac{23}{7}$
z_1	1	-1	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{-1}{7}$	0	0	$\frac{24}{7}$
x_5	0	0	0	$\frac{19}{7}$	$\frac{1}{7}$	1	0	$\frac{32}{7}$ →
x_6	0	0	0	1	0	0	1	2
Max Z	0	0	0	$-\frac{19}{7}$	$\frac{6}{7}$ ↑	0	0	$-\frac{95}{7}$

	z_1	z_2	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_2	0	0	1	8	0	3	0	17
z_1	1	-1	0	3	0	1	0	8
x_4	0	0	0	19	1	7	0	32
x_6	0	0	0	1	0	0	1	2
Max Z	0	0	0	$-\frac{133}{7}$	0	-6	0	41

$X^*(x_1, x_2, x_3) = (8, 17, 0)$

$Z^* = 41$

3) Dual (D)

$$\begin{cases} Min\ w = 10y_1 + 7y_2 + 8y_3 + 2y_4 \\ y_1 + 3y_2 + y_3 = 3 \\ 2y_1 - y_2 \geq 1 \\ y_2 + 3y_3 + y_4 \geq -2 \\ y_1 \leq 0,\ y_2 \in \mathbb{R},\ y_3 \geq 0,\ y_4 \geq 0 \end{cases}$$

4) Dedure la valeur optimale du dual

$$\boxed{w^* = 41}$$