Rattrapage

Exercice1 (7 pts)

Soi le PL suivant :

$$P\begin{cases} max z = 2a - 4b \\ a - 2b \leq 5 \\ a - b \leq 4 \\ a \in R^+, \quad b \in R^- \end{cases}$$

1- Ecrire ce programme sous forme standard

2- En considérant la forme standard et la base B(1,4) pour ce programme , réécrire ce programme sous la forme matricielle suivante :

$$\text{Max } C_B x_B + C_N x_N$$
$$\text{S.t } A_B x_B + A_N x_N = b \qquad x_B, x_N \geq 0$$

3-est –il possible de résoudre ce programme par la méthode de simplex ? Si non, justifier. Si oui déterminer la solution optimale par la méthode de simplex

Exercice 2 (5pts)

- On considère le programme mathématique suivant :

$$(P_m)\begin{cases} a^{1/2} + b^{1/2} + 3c \leq 1 \\ \sqrt{a} - 2b^{\frac{1}{2}} + c \geq 2 \\ a^{\frac{1}{2}} + \sqrt{b} + 2c \leq 1 \\ c \geq 1 \\ 2a^{1/2} + b^{1/2} = Z(\text{Max}) \end{cases}$$

1-Montrer que (P_m) peut se formuler en un P.L

2-Existe-elle une solution réalisable pour ce programme ? Justifier

- En utilisant la méthode analytique, montrer que le programme (P3) suivant n'a pas de solution optimale

$$(P3)\begin{cases} x - 2y \leq 4 \\ x - 3y \leq 6 \\ -2x + y \leq 3 \\ x, y \geq 0 \\ 2x + y = Z(\text{Max}) \end{cases}$$

Exercice 3 (8 pts)

Un laboratoire conduit des tests sur la composition des sols. Il peut traiter jusqu'à 1200 échantillons de sol par jour. Il a un contrat avec la coopérative agricole régionale pour le traitement quotidien d'au moins 400 échantillons. Le laboratoire traite également des échantillons de sols de jardins privés et de parcs municipaux. Les profits réalisés sont 0,18$ par échantillon en provenance de la coopérative agricole, 0,23$ par échantillon de jardins privés et 0,21$ par échantillon de parcs municipaux. Ce laboratoire ne dispose que de 1400 unités de temps de traitement par jour. Les échantillons de la coopérative agricole nécessitent deux fois plus de temps que ceux des parcs municipaux, qui eux prennent une unité de temps de traitement. Les échantillons des jardins privés nécessitent 1,5 unité de temps de traitement. Le laboratoire doit se maintenir dans les bonnes grâces du conseil municipal et, par conséquent, ne peut pas traiter plus d'échantillons de jardins privés que d'échantillons de parc municipaux.. Maximiser les profits.

1- Modéliser ce problème par un PL
2- Déterminer le dual de PL

Exo1 Corrigé type PL Math 2023

1) forme standard

chang variable : $b = -b'$, $b' \geq 0$

$$\begin{cases} \text{Max } Z = 2a + 4b' \\ a + 2b' + e_1 = 5 \\ a + b' + e_2 = 4 \\ a \in \mathbb{R}^+,\ b' \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

0,5

2) forme matricielle

$C_B(2,0)$ $X_b\begin{pmatrix} a \\ e_2 \end{pmatrix}$, $C_N(4,0)$

$X_N\begin{pmatrix} b' \\ e_1 \end{pmatrix}$, $A_B\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_N\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Max } Z\ (2,0)\begin{pmatrix} a \\ e_2 \end{pmatrix} + (4,0)\begin{pmatrix} b' \\ e_1 \end{pmatrix} \\ &\text{S.t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}(a, e_2) + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}(b', e_1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

3) Oui, il est possible de resoudre ce programme par simplex car ∃ base initiale realisable $b(3,4)$, $e\ SFC\ \mathbb{R}^3$

0,5

	a	b'	e1	e2	b
e1	1	2	1	0	5
e2	1	1	0	1	4
Zmax	2	4	0	0	0

0,1

	a	b'	e1	e2	b
b'	1/2	1	1/2	0	5/2
e2	1/2	0	-1/2	1	3/2
	0	0	-4/2	0	-10

0,1

(a) est une variable hors base qui a une valeur de coût nul alors la solution optimal est une droite $[M_1, M_2]$ 0,1

$M_1\begin{pmatrix} b' \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$ 0,1

$M_2 = ?$

	a	b'	e1	e2	b
b'					1
a	1				3
					-10

0,1

$M_2\begin{pmatrix} b' \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 0,1

valeur optimal $\boxed{Z^* = 10}$

Exo2

1) formuler le PL

$r_a = a^{\frac{1}{2}} = x$ $x \geq 0$ 0,5

$r_b = b^{\frac{1}{2}} = y$ $y \geq 0$ 0,5

$$(PL)\begin{cases} x + y + 3c \leq 1 & \text{---- (1)} \\ x - 2y + c \geq 2 & \text{---- (2)} \\ x + y + 2c \geq 1 \\ c \geq 1 \\ 2x + y = Z\ \text{max} \end{cases}$$

$x, y \in \mathbb{R}$ 0,1

2) ∄ solution realisable car il ya des contraintes (1) et (2) contradictoires. 1

* (P3) n'a pas solution optimale

$$\begin{cases} x - 2y + e_1 = 4 \\ x - 3y + e_2 = 6 \\ -2x + y + e_3 = 3 \\ x, y, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \\ 2x + y = Z\ \text{max} \end{cases}$$

	x	y	e1	e2	e3	b
e1	1	-2	1	0	0	4
e2	1	-3	0	1	0	6
e3	-2	1	0	0	1	3
max	2	1	0	0	0	0

0,1

	x	y	e1	e2	e3	b
x	1	-2	1	0	0	4
e2	0	-1	-1	1	0	2
e3	0	-3				
Max	0	5	-2	0	0	-8

1

la colonne de variable y qui est rentrée en base sont tous négatives alors le PL est non borné et la valeur optimale $\to +\infty$. 1

EXO3

Modéliser

0.75

variables de décision

x_1 : nbr d'analyses pour la coopérative agricole 1

x_2 : nbr d'analyses pour jardins privés.

x_3 : nbr d'analyses pour les parcs municipaux.

0.75

$$\begin{cases} \text{Maximiser } Z = 0.18x_1 + 0.23x_2 + 0.21x_3 \\ \text{s.t } x_1 + x_2 + x_3 \leq 1200 & 0.75 \\ -x_1 \leq -400 & 0.75 \\ 2x_1 + 1.5x_2 + x_3 \leq 1400 & 0.75 \\ x_2 - x_3 \leq 0 & 0.75 \\ x_{1,2,3} \geq 0 & 0.75 \end{cases}$$

Dual

0.75

$$\begin{cases} \text{Minimiser } W = 1200y_1 - 400y_2 + 1400y_3 \\ \text{S.T } y_1 - y_2 + 2y_3 \geq 0.18 & 0.1 \\ y_1 + 1.5y_3 + y_4 \geq 0.23 & 0.1 \\ y_1 + y_3 - y_4 \geq 0.21 & 0.1 \\ y_{1,2,3,4} \geq 0 & 0.75 \end{cases}$$