Corrigé type PL 2021 Examen

Exo 1

1- mettre (P) sous forme canonique pure :

A- changement de variable :

$x_3 = x_{31} - x_{32}$; $x_{31}, x_{32} \geq 0$ (0,25)

$x_2 = -x_{21}$ tq $x_{21} \geq 0$ (0,25)

PL (1,5)
$$\begin{cases} 3x_1 + \frac{1}{2}x_{21} + x_{31} - x_{32} \leq 2 \\ 4x_1 + x_{21} - x_{31} + x_{32} \leq 12 \\ -4x_1 - x_{21} + x_{31} - x_{32} \leq -12 \\ -x_1 - x_{21} - x_{31} + x_{32} \leq 1 \\ x_1 \geq 0,\ x_{21} \geq 0,\ x_{31}, x_{32} \geq 0 \\ x_1 + x_{21} - 2x_{31} + 2x_{32} = Z_{max} \end{cases}$$

B- Montrer que Pm est un PL

changement var : $x = a^2$, $x \geq 0$ (0,5)

$y = (b^3)^2$ tq $y \geq 0$ (1)

PL : (1)
$$\begin{cases} x + y \geq 1 \\ x - 2y = -2 \\ x + 3y \leq 6 \\ 2x + y = Z_{max} \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{cases}$$

C- PS (1)
$$\begin{cases} 3x + y + e_1 = 15 \\ x + 2y + e_2 = 10 \\ x, y, e_1, e_2 \geq 0 \end{cases}$$

(1)

- le point $X(1,0,1,9)$ n'est pas un point extrême car : le nombre de variable de base $B = 2$
- le nombre de variable hors base égale $4 - 2 = 2$ tq $X_{\bar{B}} = 0$.

Mais on trouve un seul variable nulle et le nombre de variable non nulle > 2.

2) le point $(-1,1)$ n'est pas une solution réalisable car $-1 < 0$ (contrainte logique de positivité n'est pas vérifiée). (1)

3) solution de base réalisable (0,5)

$B = \{3,4\} \Rightarrow A^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$X^B = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}$ (1)

4) elle représente le point origine $O(0,0)$. (1)

Exo 2

Modélisation

variable : x_1, x_2, x_3, x_4 respectivement quantité : œufs, lait, fromage, pain. (1,00)

contraintes (1)

$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 15$; Nickel (1)

$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 10$; Zinc

$\boxed{Max Z : 6x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 9x_4}$

(1,5)

0,5

$$\text{PL}\begin{cases} 6x_1+8x_2+4x_3+9x_4 = \text{Max } Z \\ 2x_1+x_2+x_3+3x_4 \leq 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ x_1+3x_2+x_3+x_4 \leq 10 \end{cases}$$

$m=2$ rang $A=2=m$

$\Rightarrow \exists$ au moin une base

$B_{3,4}$; A_B unitaire

$C_B=(0,0)$.

$\Rightarrow$ PL s.f.c % $B_{3,4}$.

1

	x_1	x_2	x_3	x_4	e_1	e_2	b
e_1	2	1	1	3	1	0	15 ← Lp
e_2	1	3	1	1	0	1	10
CMax	6	8	4	9	0	0	$-z=0$
				↑ Cp			

1,5

	x_1	x_2	x_3	x_4	e_1	e_2	b
x_4	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	5
e_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	5 ←
CMax	0	5	1	0	$-\frac{9}{3}$	0	-45
		↑ Cp					

1,5

	x_1	x_2	x_3	x_4	e_1	e_2	b
x_4	$\frac{15}{24}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{35}{8}$
x_2	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{15}{8}$
CMax	$-\frac{5}{8}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{57}{24}$	$-\frac{15}{8}$	$-\frac{435}{8}$

$z^* = \frac{435}{8}$ = la consomation maximale en cadmium

1

c) la consomation journalière Zinc que stuct supprimé éliminée

$$z_{ink} = \frac{35}{8}\times 1 + \frac{15}{8}\times 3.$$

pain, lait

$$= \frac{35}{8} + \frac{45}{8} = \frac{80}{8} = 10$$

$$\boxed{z_{ink} = 10}$$

Nickel :

pain, lait

$$\frac{35}{8}\times 3 + \frac{15}{8}\times 1 =$$

$$\frac{105}{8} + \frac{15}{8} = \frac{120}{8} = 15$$