Exemples d'application : 23.11.2022

$$(P_1)\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0 ,\ x_2 \leq 0 ,\ x_3 \text{ qlq} \\ Z\max : 2x_1 + x_2 - x_3 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0$ $x_2 \leq 0$ x_3 qlq

1	-1	-1	2	$y_1 \geq 0$
2	1	1	3	$y_2 \leq 0$
1	1	0	1	$y_3 \geq 0$
Max 2	1	-1		

1	2	1	2	$\geq$
-1	1	1	1	$\leq$
-1	1	0	-1	$=$
Min 2	3	1		

$$D\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 2 \\ -y_1 + y_2 + y_3 \leq 1 \\ -y_1 + y_2 = -1 \\ \text{Min}(n) = 2y_1 + 3y_2 + y_3 \\ y_1 \geq 0 \quad y_2 \leq 0 \quad y_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$(P_2)\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 11 \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \\ 3x_1 - 2x_2 = Z\max \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$

3	2	11	$y_1 \leq 0$
-2	1	2	$y_2 \geq 0$
1	-1	0	$y_3 \geq 0$
Max 3	-2		

3	-2	1	3	$\geq$
2	1	-1	-2	$\geq$
Min 11	2	0		

$$D\begin{cases} 3y_1 - 2y_2 + y_3 \geq 3 \\ 2y_1 + y_2 - y_3 \geq -2 \\ \text{Min}(w) : 11y_1 + 2y_2 \\ y_1 \leq 0 ,\ y_2 \geq 0 ,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

* Trouver le primal de ce dual :

$$D\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 3 \\ y_1 - y_2 + y_3 \geq 2 \\ 6y_1 + y_2 + 3y_3 = W\ (\text{min}) \\ y_{1,2,3} \geq 0 \end{cases}$$

04.12.2022

Exo :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ x_2 \leq 3 \\ \text{Max}(Z) = 4x_1 + 5x_2 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + e_1 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + e_2 = 7 \\ x_2 + e_3 = 3 \\ x_1 , x_2 , e_1 , e_2 , e_3 \geq 0 \\ \text{Max}(Z) = 4x_1 + 5x_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$J = \{3 , 4 , 5\}$

$X_J = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b
e_1	2	1	1	0	0	8
e_2	1	2	0	1	0	7
e_3	0	1	0	0	1	3
Z	4	5	0	0	0	$-z = 0$

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b
e_1	2	0	1	0	-1	5
e_2	1	0	0	1	-2	1
x_2	0	1	0	0	1	3
Z	4	0	0	0	-5	-15

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b
e_1	0	0	1	-2	3	3
x_1	1	0	0	1	-2	1
x_2	0	1	0	0	1	3
Z	0	0	0	-4	3	-19

Chapitre 04 : Dualité 16.11.2022

1. Interruption canonique de la dualité :

une entreprise A fabrique 2 produits P_1, P_2 à l'aide de matière première M_1, M_2, M_3.

	P_1	P_2	disponsibilité
M_1	2	1	8
M_2	1	2	7
M_3	0	1	3
Profit	4	5	

La tache de production est de faire fonctionner l'usine de manière optimale selon le modèle mathématique

$$PL \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ x_2 \leq 3 \\ 4x_1 + 5x_2 = Z_{max} \end{cases}$$

Supposons une entreprise B s'adresse à l'entreprise A et propose à cette dernière d'acheter la totalité des matières première M_1, M_2, M_3 a un prix unitaire y_1, y_2, y_3 respectivement

- Quel prix l'entreprise B doit elle propose afin de minimiser ses depenses tout en obtenant l'accord de l'entreprise A ?
- Le prix devente d'une unité de P_1 (resp P_2) est 4 (resp 5) il ncessite 2 uité (resp 1) de M_1, 1 unité (resp 2) de M_2 et 0 unité de M_3
- L'entreprise A acceptera la proposition

$$2y_1 + y_2 \geq 4$$
$$y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 5$$

L'entreprise B cherche à minimiser le coût d'achat sous ses contraintes :

$$Min\ w = 8y_1 + 7y_2 + 3y_3$$

$$PL(B) \begin{cases} y_1 + y_2 \geq 4 \\ y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 5 \\ 2y_1 + 7y_2 + 3y_3 = Min\ w \end{cases}$$

PL (B) est le dual de PL (A)

PL (A) est appelé programme primal noté (P)

PL (B) est " " dual noté (D)

II - Comment formuler le dual:

Notons que à chaque programme primal (P), il existe un autre programme linéaire dual (D) et vice versa

Les deux programmes contiennent les mêmes éléments mais arrangés de manière differente:

* Le programme (P) est caractérise par le tableau simplexe

$$\left(\begin{array}{c|c} A & \\ \hline C & \end{array}\right)$$

par définition le problème Dual est obtenant en ce tableau

$$\left(\begin{array}{c|c} A^t & C^t \\ \hline b^t & \end{array}\right)$$ et en appliquent les règles suivantes:

Primal (P)	Dual (D)
Max Z	Min W
Contraintes $\geq$	$y_i \leq 0$
contraintes $\leq$	$y_i \geq 0$
Contraintes $=$	y_i qlq
$x_i \geq 0$	contraintes $\geq$
$x_i \leq 0$	contrainte $\leq$
x qlq	contraintes

* Vérifier si $\bar{y}(0, \frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ est une solution réalisable pour (D)
* Calculer $W(\bar{y})$
* Vérifier si $\bar{x}(2, 1)$ est une solution réalisable pour (P).
* Calculer $Z(\bar{x})$
* Comparer $W(\bar{y})$ et $Z(\bar{x})$.

Solution :

* Le primal :

$$P \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ 3x_1 + 2x_2 = Z\max \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

* $\bar{y}(0, \frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ est une solution réalisable car elle vérifie toutes les contraintes
* $W(\bar{y}) = 8$
* $\bar{x}(2, 1)$ est une solution réalisable pour le (P) car elle vérifiée toutes les contraintes.
* $Z(\bar{x}) = 8$

$\Rightarrow W(\bar{y}) = Z(\bar{x})$.

4/. Aspects théoriques de la Dualité :

* Considérons un primal (P) et son dual (D) comme suit :

$$(P) \begin{cases} AX \leq b \\ CX = Z\max \end{cases} \quad X \geq 0$$

$$(D) \begin{cases} yA \geq C \\ by = W(\min) \end{cases} \quad y \geq 0$$

Théorème 01 : le Dual de Dual est le primal

Théorème 02 : Si $(\bar{X}, \bar{y})$ constituent 1 couple de solution réalisable de (P, D) alors $C\bar{X} \leq \bar{y}b$

* Verifier si $\bar{y}(0, \frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ est une solution réalisable pour (D)
* Calculer $W(\bar{y})$
* Verifier si $\bar{x}(2, 1)$ est une solution realisable pour (P).
* Calculer $Z(\bar{x})$
* Comparer $W(\bar{y})$ et $Z(\bar{x})$.

Solution :

* Le primal :

$$P \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ 3x_1 + 2x_2 = Z\max \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

* $\bar{y}(0, \frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ est une solution realisable car elle verifier toutes les contraintes
* $W(\bar{y}) = 8$
* $\bar{x}(2, 1)$ est une solution realisable pour le (P) car elle verifiée toutes les contraintes.
* $Z(\bar{x}) = 8$

$\Rightarrow W(\bar{y}) = Z(\bar{x})$.

4/. Aspects theoriques de la Dualité :

* Considerons un primal (P) et son dual (D) comme suit :

$$(P) \begin{cases} AX \leq b \\ CX = Z\max \end{cases} \quad X \geq 0$$

$$(D) \begin{cases} yA \geq C \\ by = W(\min) \end{cases} \quad y \geq 0$$

théoreque 01 : le Dual de Dual est le primal

théoreque 02 : Si $(\bar{X}, \bar{y})$ constitnent 1 couple de solution realisable de (P, D) alors $C\bar{X} \leq \bar{y}b$

04.12.2022

Exo:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ x_2 \leq 3 \\ \text{Max}(Z) = 4x_1 + 5x_2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + e_1 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + e_2 = 7 \\ x_2 + e_3 = 3 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \\ \text{Max}(Z) = 4x_1 + 5x_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$J = \{3, 4, 5\}$

$X_J = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b
e_1	2	1	1	0	0	8
e_2	1	2	0	1	0	7
e_3	0	1	0	0	1	3
Z	4	5	0	0	0	$-z = 0$

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b
e_1	2	0	1	0	-1	5
e_2	1	0	0	1	-2	1
x_2	0	1	0	0	1	3
Z	4	0	0	0	-5	-15

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b
e_1	0	0	1	-2	3	3
x_1	1	0	0	1	-2	1
x_2	0	1	0	0	1	3
Z	0	0	0	-4	3	-19

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b
e_3	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	1
x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	3
x_2	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	2
Z	0	0	-1	-2	0	-22

* Solution optimal :

$(x_1, x_2, e_1, e_2, e_3) = (3, 2, 0, 0, 1)$

* Solution de base :

(e_3, x_1, x_2)

$Z = 22$

07.12.2022

théorème 02 :

$\forall (\bar{x}, \bar{y})$ solutions réalisable

$c\bar{x} \leq \bar{y} b$

$$\text{IP} \begin{cases} Axy \leq by \\ Z_{max} = cx \end{cases} \qquad \text{ID} \begin{cases} yAx \geq cx \\ W_{min} = by \end{cases}$$

$\forall$ x, y deux solutions realisables $cx \leq by$

théorème 03 :

Si $(\bar{x}, \bar{y})$ constitue couple de solutions réalisables de (IP, ID) Si de plus $c\bar{x} = \bar{y}b$ alors $(\bar{x}, \bar{y})$ est une couple de solutions optimale

* $\forall$ x une solution realisable IP $cx \leq \bar{y}b$

$cx \leq c\bar{x}$

$\Rightarrow \bar{x}$ est une solution optimale

* $\forall$ y une solution realisable ID $yb \geq c\bar{x}$

$yb \geq \bar{y}b$

$\Rightarrow \bar{y}$ est une solution optimale

théoréme 04 :

1). Si (P) et (D) admettent des solutions réalisables finies alors (P) et (D) admettent des solutions optimales et leurs valeurs à l'optimum sont egaux

2). Si l'un des deux n'est pas bornée alors l'autre n'admet pas de solutions realisables

3). Si le primal (P) (resp (D)) n'admet pas de solutions realisable alors son Dual (resp son primal) est non borné ou bien n'admet pas de solutions réalisables

* Tableau recapitulatif :

		(P) admet une solution réalisable		(P) admet pas de solution réalisable
		optimale	non bornée	
(D) admet de solution réalisable	optimale	$Z_{max} = W_{min}$		
	non bornée			(D) non bornée $w \to -\infty$ (P) pas de solution
(D) n'admet pas de solution réalisable			$Z \to +\infty$ (D) pas de solution	(D) n'admet pas de solution (P) pas de solution