Université A. MIRA de Béjaia

2° *Licence* **Faculté des Sciences Exactes**
Département de Recherche Opérationnelle

Année Universitaire 2015-2016

Corrigé de l'Examen de Rattrapage de Programmation Linéaire

Exercice 1 (**12 points**) Considérons le problème linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} \max & Z = 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ & 3x_1 - x_2 + x_3 = 7 \\ & x_1 + 3x_3 \leq 8 \\ & x_3 \leq 2 \\ & x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \tag{1}$$

1. Écrire le problème (1) sous forme standard
2. Résoudre le problème (1)
3. Écrire le problème Dual noté (D) du problème (1).
4. Déduire la solution Optimale du problème (D) si elle existe.

Corrigé de l'exercice 1

1. Comme la variable $x_1 \in \mathbb{R}$, alors on fait le changement de variable suivant :

$$x_1 = z_1 - z_2, \quad z_1 \geq 0, \quad z_2 \geq 0.$$

Le problème (1) s'écrit alors sous la forme

$$\begin{array}{ll} \max & Z = 3z_1 - 3z_2 + x_2 - 2x_3 \\ & z_1 - z_2 + 2x_2 \geq 10 \\ & 3z_1 - 3z_2 - x_2 + x_3 = 7 \\ & z_1 - z_2 + 3x_3 \leq 8 \\ & x_3 \leq 2 \\ & z_1, z_2, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \tag{2}$$

Le problème standard associé au problème (2) est

$$\begin{array}{ll} \max & Z = 3z_1 - 3z_2 + x_2 - 2x_3 \\ & z_1 - z_2 + 2x_2 - x_4 = 10 \\ & 3z_1 - 3z_2 - x_2 + x_3 = 7 \\ & z_1 - z_2 + 3x_3 + x_5 = 8 \\ & x_3 + x_6 = 2 \\ & z_1, z_2, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array} \tag{3}$$

2. On peut résoudre le problème (1) par la méthode des deux phases. La forme auxiliaire associée au problème (3) est :

$$\begin{array}{ll} \max & Z = -x_7 - x_8 \\ & z_1 - z_2 + 2x_2 - x_4 + x_7 = 10 \\ & 3z_1 - 3z_2 - x_2 + x_3 + x_8 = 7 \\ & z_1 - z_2 + 3x_3 + x_5 = 8 \\ & x_3 + x_6 = 2 \\ & z_1, z_2, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array} \tag{4}$$

Phase I

Itération 1

		c	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1		
		x	z_1	z_2	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8		
c_B^T	Base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	θ	
-1	a_8	10	1	-1	2	0	-1	0	0	1	0	10	
-1	a_9	7	3	-3	-1	1	0	0	0	0	1	7/3	$\rightarrow$
0	a_6	8	1	-1	0	3	0	1	0	0	0	8	
0	a_7	2	0	0	0	1	0	0	1	0	0	/	
z=-17		E	-4	4	-1	-1	1	0	0	0	0		
			$\uparrow$										

Itération 2

		c	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1		
		x	z_1	z_2	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8		
c_B^T	Base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	θ	
-1	a_8	23/3	0	0	7/3	-1/3	-1	0	0	1	-1/3	23/7	$\rightarrow$
0	a_1	7/3	1	-1	-1/3	1/3	0	0	0	0	1/3	/	
0	a_6	17/3	0	0	1/3	8/3	0	1	0	0	-1/3	17	
0	a_7	2	0	0	0	1	0	0	1	0	0	/	
z=-23/3		E	0	0	-7/3	1/3	1	0	0	0	7/3		
					$\uparrow$								

Itération 3

		c	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1
		x	z_1	z_2	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
c_B^T	Base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
0	a_3	23/3	0	0	1	-1/7	-3/7	0	0	3/7	-1/7
0	a_1	24/7	1	-1	0	2/7	-1/7	0	0	1/7	2/7
0	a_6	32/7	0	0	0	19/7	1/7	1	0	-1/7	-2/7
0	a_7	2	0	0	0	1	0	0	1	0	0
z=0		E	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Le critère d'optimalité est vérifié, la solution courante $x = (\frac{24}{7}, 0, \frac{23}{7}, 0, 0, \frac{32}{7}, 2)$ est une solution optimale pour le problème (4), avec $Z = 0$. On utilise alors cette solution dans la phase II.

Phase II

Itération 1

		c	3	-3	1	-2	0	0	0		
		x	z_1	z_2	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
c_B^T	Base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	θ	
1	a_3	23/3	0	0	1	-1/7	-3/7	0	0	/	
3	a_1	24/7	1	-1	0	2/7	-1/7	0	0	/	
0	a_6	32/7	0	0	0	19/7	1/7	1	0	32	$\rightarrow$
0	a_7	2	0	0	0	1	0	0	1	/	
z=95/7		E	0	0	0	19/7	-6/7	0	0		
							$\uparrow$				

Itération 2

		c	3	-3	1	-2	0	0	0
		x	z_1	z_2	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
c_B^T	Base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
1	a_3	17	0	0	1	8	0	3	0
3	a_1	8	1	-1	0	3	0	1	0
0	a_5	32	0	0	0	19	1	7	0
0	a_7	2	0	0	0	1	0	0	1
z=41		E	0	0	0	15	0	6	0

Le critère d'optimalité est vérifié, la solution $(z_1, z_2, x_2, x_3) = (8, 0, 17, 0)$ est une solution optimale pour le problème (2). La solution correspondante pour le problème (1) est alors

$$\boxed{x = (x_1, x_2, x_3) = (8, 17, 0) \text{ et } Z^* = 41}$$

3. Le Problème dual du Problème (1) s'ecrit sous la forme :

$$\begin{array}{ll} \min & W = 10y_1 + 7y_2 + 8y_3 + 2y_4 \\ & y_1 + 3y_2 + y_3 = 3 \\ & 2y_1 - y_2 \geq 1 \\ & y_2 + 3y_3 + y_4 \geq -2 \\ & y_1 \leq 0, \quad y_2 \in \mathbb{R}, \quad y_3, y_4 \geq 0 \end{array} \tag{5}$$

4. La solution optimale du problème dual (5) existe puisque le problème primal (1) possède une solution optimale finie. Soit $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ la solution optimale du problème (5).

   On a la 1^{ere} et la 4^{eme} contrainte du problème primal (1) ne sont pas saturées, alors la 1^{ere} et la 4^{eme} variables duales sont nulles :
$$y_1 = 0 \text{ et } y_4 = 0.$$
   Et comme la 1^{ere} et la 2^{eme} variables du problème primal (1) à l'optimum sont strictement positives, alors la 1^{ere} et la 2^{eme} contraintes du problème dual (5) sont saturées. On aura alors le système suivant :
$$\left\{\begin{array}{l} y_1 + 3y_2 + y_3 = 3 \\ 2y_1 - y_2 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3y_2 + y_3 = 3 \\ -y_2 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y_2 = -1 \\ y_3 = 6 \end{array}\right.$$
   Par conséquent, la solution optimale du problème dual (5) est :

$$\boxed{y = (y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, -1, 6, 0) \text{ et } W^* = 41}$$

Exercice 2 (**8 points**) Considérons le problème linéaire suivant :

$$\begin{array}{l} \max \ \ c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ A_B x_B + A_N x_N = b \\ x_B, x_N \geq 0 \end{array} \tag{6}$$

Soit $x_B \in \mathbb{R}^3$, $x_N \in \mathbb{R}^1$, $b \in \mathbb{R}^3$. La matrice A_B est inversible et vérifie la relation $LA_B = U$,

où $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $c_B^T = (1, -3, 2)$, $b^T = (1, 0, 1)$, $A_N^T = (1, 0, 2)$.

1. Montrer que pour la solution réalisable basique associée à la base A_B, on a $x_B = (3, 2, 4)^T$.

2. Montrer que la solution duale associée à la solution précédente est $y = (7, -10, -2)^T$
3. Pour quelles valeurs de c_N cette solution est-elle optimale ?

Corrigé de l'exercice 2

1. On a

$$A_B x_B = b \tag{7}$$

En multipliant l'equation (7) par L à gauche, on aura :

$$\begin{aligned}
&LA_B x_B = Lb\\
\Rightarrow &Ux_B = Lb\\
\Rightarrow &\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\\
\Rightarrow &\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -2 \\ x_3 = 4 \end{cases}\\
\Rightarrow &\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 4 \end{cases}
\end{aligned}$$

Par conséquent, $x_B = (3, 2, 4)^T$.

2. On a :

$$A_B^T y = c_B \tag{8}$$

En posant

$$L^T z = y \tag{9}$$

dans l'equation (8), on aura :

$$\begin{aligned}
&A_B^T L^T z = c_B\\
\Rightarrow &U^T z = c_B\\
\Rightarrow &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\\
\Rightarrow &\begin{cases} z_1 = 1 \\ 3z_1 + z_2 = -3 \\ -2z_1 - z_2 + z_3 = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Par conséquent, on aura $z^T = (1, -6, -2)^T$ que l'on remplace dans la relation (9) pour avoir :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3. Pour que la solution précédente soit optimale, il faut que la relation suivante soit vérifiée :

$$\begin{aligned}
&A_N^T y \geq c_N\\
\Rightarrow &(1, 0, 2) \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix} \geq c_N\\
\Rightarrow &c_N \leq 3
\end{aligned}$$