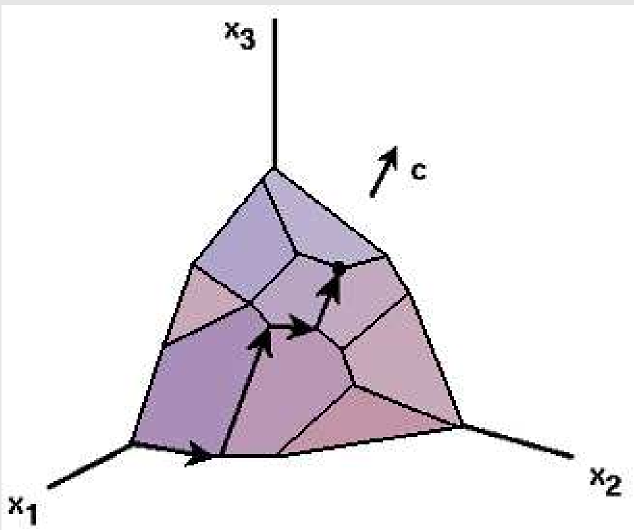
Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences Juridiques Économiques et Sociales

Programmation Linéaire

Mohamed HACHIMI

FILIÈRE SCIENCES ÉCONOMIQUES ET GESTION
TROISIÈME ANNEE **EG**



Semestre 5

Table des matières

1 Formulation

1. Introduction

La programmation linéaire est l'une des plus importantes techniques d'optimisation utilisées en recherche opérationnelle. Ceci est dû à la facilité de la modélisation, à l'efficacité des algorithmes développés et à l'existence sur le marché de nombreux logiciels. La généralisation de micro-informatique a mis la programmation linéaire à la portée de tous.

Le objectif de programmation linéaire est de déterminer l'affectation optimale de ressources rares entre des activités ou produits concurrents. Les situations économiques demandent souvent qu'on optimise une fonction sous plusieurs contraintes prenant la forme d'inégalités.

2. Formulation d'un problème de maximisation

2.1. Enonce du problème

Une entreprise fabrique deux produits A et B, en utilisant une machine m et deux matières premières p et q. On dispose chaque jour de 8 heures de m, de 10 kg de p et de 36 kg de q. On suppose que :

— la production d'une unité de A nécessite 2 kg de p et 9 kg de q, et utilise la machine m durant 1 heure ;

— la production d'une unité de B nécessite 2 kg de p et 4 kg de q, et utilise la machine m durant 2 heure ;

— les profits réalisés sont de 50 dh par unité de A et 60 dh par unité de B.

L'objectif que poursuit l'entreprise est de maximiser le profit qu'elle pourra tirer, par jour, de ces 2 produits en utilisant au mieux ses ressources.

Le tableau suivant résume les données afférentes à ce problème de production :

	A	B	Disponible
m	1 h	2 h	8 h
p	2 kg	2 kg	10 kg
q	9 kg	4 kg	36 kg
Profit unitaire	50 dh	60 dh	

2.2. La construction d'un modèle linéaire

Quelles sont les informations dont doit disposer le directeur de l'entreprise pour considérer que son problème est résolu ? Il suffit de connaître la quantité du produit A et la quantité du produit B à fabriquer quotidiennement, n'est-ce pas ? Agissons comme si ces quantités nous étaient connues et dénotons-les par :

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{la quantité du produit A à produire} \\ x_2 &= \text{la quantité du produit B à produire} \end{aligned}$$

Les variables x_1 et x_2 sont dites **variables de décision**.

Quel profit l'entreprise retirera-t-elle de la vente de ces deux produits ? Il s'agit d'additionner les bénéfices à tirer de chacun des 2 produits :

— pour le produit A, elle retire 50 dh par unité et en fabrique x_1 unités ; cette production lui rapporte donc un profit de $(50\,x_1)$ dh ;

— de même, la quantité x_2 du produit B lui permet de faire un profit de $(60\,x_2)$ dh.

Le profit total à tirer des deux produits s'élève donc à :

$$(50\,x_1 + 60\,x_2) \text{ dh}$$

Nous dénoterons ce profit total par z et laisserons implicite l'unité monétaire :

$$z = 50\,x_1 + 60\,x_2$$

Nous cherchons évidemment à rendre z aussi grand que possible en donnant à x_1 et x_2 des valeurs appropriées.

La grandeur z est une fonction qui, à chaque plan de production (une quantité de A, une quantité de B), associe le nombre de dirhams que l'entreprise retirerait comme profit si elle adoptait ce plan. Cette fonction z, qui traduit l'objectif de notre problème, s'appelle **fonction objectif** ou **fonction économique**. Et, comme nous cherchons à rendre z aussi grand que possible, nous écrivons :

$$\text{Maximiser } z \qquad \text{où } z = 50\,x_1 + 60\,x_2$$

ce que généralement l'on convient d'abréger comme suit :

$$\text{Max} \;\; z = 50\,x_1 + 60\,x_2$$

S'il ne s'agissait pour l'entreprise que de maximizer z, il suffirait de laisser augmenter x_1 ou x_2 pour que z prenne une valeur aussi grande qu'elle le souhaite. Mais s'attendre à de tels profits s'apparente plus au rêve qu'à la situation de notre entreprise. Il y a bien sûr des empêchements naturels, appelés **contraintes**, qui freinent le rêve d'un profit infini. Prenons en considération tour à tour chacune des contraintes.

Contrainte relative à la machine m Le temps d'utilisation de la machine m pour fabriquer les produits A et B ne peut excéder les 8 heures disponibles :

$$\text{Temps d'utilisation de } m \leqslant 8.$$

Or, ce temps utilisé est la somme des heures consacrées à chacun des types de produits. Pour le produit A, le temps nécessaire à la fabrication de la quantité x_1 se calcule ainsi :

$$1 \text{ heure/(unité de A)} \times x_1 \text{ (unité de A)} = x_1 \text{ heures}$$

pour le produit B, on procède de façon analogue :

$$2 \text{ heure/(unité de B)} \times x_2 \text{ (unité de B)} = 2x_2 \text{ heures}$$

La contrainte relative à la machine m s'écrit donc :

$$x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \qquad (m)$$

On emploie le signe « $\leqslant$ », et non « $=$ », car il n'est pas obligatoire que toutes les heures disponibles soient utilisées pour la fabrication des produits A et B, bien qu'il ne soit pas interdit qu'il en soit ainsi.

Contraintes relatives aux matières premières En s'inspirant de la contrainte relative à la machine, ces contraintes s'écrivent tout naturellement :

$$2x_1 + 2x_2 \leqslant 10 \qquad (p)$$
$$9x_1 + 4x_2 \leqslant 36 \qquad (q)$$

Contraintes de positivité Elles assurent que la solution ne comporte pas des valeurs négatives (inacceptables).

$$x_1,\; x_2 \geqslant 0,$$

Le modèle se résume ainsi :

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} \text{Max } z = 50x_1 + 60x_2 \\ \quad x_1 + 2x_2 \leqslant \ 8 \\ \quad 2x_1 + 2x_2 \leqslant 10, \qquad \text{soit : } x_1 + x_2 \leqslant 5 \\ \quad 9x_1 + 4x_2 \leqslant \ 36 \\ \quad x_1 \ , \ x_2 \geqslant \ 0 \end{cases}$$

2.3. Variables d'écart

Afin de ramener les contraintes à des égalités (qui sont plus faciles à traiter que les inégalités), on introduit des **variables d'écart**. Ces variables seront toujours, comme les variables de décision x_1 et x_2, positives ou nulles.

Après l'ajout des variables d'écart x_3, x_4 et x_5 relatives aux contraintes (m), (p) et (q), nous obtenons la formulation :

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} \text{Max } z = 50x_1 + 60x_2 \\ \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = \ 8 \\ \quad 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ \quad 9x_1 + 4x_2 + x_5 = 36 \\ \quad x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 \ , \ x_4 \ , \ x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

La variable d'écart d'une contrainte représente la quantité disponible non utilisée. C'est l'écart entre la disponibilité et le besoin.

2.4. Généralisation : Problème de production

Soient m machines M_i $(i = 1, \ldots, m)$ qui fabriquent en série n types de produits P_j $(j = 1, \ldots, n)$. La machine M_i a une capacité maximum de b_i unités de temps. La fabrication d'une unités du produit P_j nécessite l'utilisation de la machine M_i durant a_{ij} unités de temps.

Si c_j représente le gain relatif à la production d'une unité du produit P_j, la résolution du problème

$$\begin{cases} \text{Max} \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \quad a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \cdots + \ a_{1n}x_n \leqslant \ b_1 & (\mathsf{M}_1) \\ \quad a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \cdots + \ a_{2n}x_n \leqslant \ b_2 & (\mathsf{M}_2) \\ \quad \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m & (\mathsf{M}_m) \\ \quad x_1 \ , \quad x_2 \ , \ \ldots \ , \quad x_n \geqslant \ 0 \end{cases}$$

fournira les valeurs optimales des quantités x_j à produire de chacun des produits ; la fonction économiques représente le gain total ; le premier membre de chaque contrainte (M_i) représente le temps total d'utilisation de la machine M_i. Les valeurs des variables d'écart associées à chacune de ces contraintes correspondent au temps disponible non utilisé de chaque machine.

3. Formulation d'un problème de minimisation

3.1. Enoncé du problème

Un agriculteur souhaite que son troupeau consomme la plus faible ration quotidienne de trois éléments nutritifs A, B et C. Les exigences quotidiennes sont de 16 pour A, 12 pour B et 18 pour C. L'agriculteur achète deux types d'aliments P et Q :

— une unité de P comprend 2 unités de A, 1 unité de B et 1 unité de C ; et elle coûte 20 dh ;

— une unité de Q comprend 1 unité de A, 1 unité de B et 3 unités de C ; et elle coûte 40 dh.

L'agriculteur cherche la combinaison la moins coûteuse des quantités de P et Q qui respectera l'exigence de consommation minimale d'éléments nutritifs.

Le tableau suivant résume les données afférentes à ce problème :

	P	Q	Besoins minimaux
A	2	1	16
B	1	1	12
C	1	3	18
Coût unitaire	20 dh	40 dh	

3.2. La construction d'un modèle linéaire

Appelons x_1 et x_2 les quantités des aliments P et Q qu'il faut acheter. L'objectif de l'agriculteur est évidemment de minimiser le coût total des aliments qu'il faut acheter. Mathématiquement cela s'écrit :

$$\text{Minimiser } z = 20x_1 + 40x_2$$

ce que généralement l'on convient d'abréger comme suit :

$$\text{Min } z = 20x_1 + 40x_2$$

Chacun des 3 éléments nutritifs à considérer donne lieu à une contrainte, qui vise à exiger que les aliments, dans leur ensemble, satisfassent les besoins quotidiens du troupeau. On obtient :

$$2x_1 + x_2 \geqslant 16 \tag{A}$$
$$x_1 + x_2 \geqslant 12 \tag{B}$$
$$x_1 + 3x_2 \geqslant 18 \tag{C}$$

Les contraintes ci-dessus emploie le signe « $\geqslant$ » parce qu'il faut respecter les exigences de consommation minimales, mais que celles-ci peuvent être dépassées.

Enfin, il faut pas oublier qu'on peut pas acheter des quantités négatives de P ou Q :

$$x_1,\ x_2 \geqslant 0$$

Le modèle se résume ainsi :

$$\begin{cases} \text{Min } z = 20x_1 + 40x_2 \\ \quad 2x_1 + \ \ x_2 \geqslant 16 \\ \quad\ x_1 + \ \ x_2 \leqslant 12 \\ \quad\ x_1 + 3x_2 \leqslant 18 \\ \quad\ x_1 \ \ , \ \ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

3.3. Généralisation : Problème de mélange

Il s'agit de rechercher un régime alimentaire qui, tout en étant le meilleur marché possible, garantisse un apport suffisant en éléments nutritifs.

Soient n aliments de prix c_j $(j = 1, \ldots, n)$ par unité ; m éléments nutritifs ; a_{ij} la quantité du $i^{\text{ème}}$ élément nutritif contenue dans une unité du $j^{\text{ème}}$ aliment ; b_i $(i = 1, \ldots, m)$ les besoins respectifs en les m éléments nutritifs.

Si les variables x_j $(j = 1, \ldots, n)$ représentent les quantités des divers aliments du régime, on obtient le problème

$$\begin{cases} \text{Min} \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geqslant b_1 \\ \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geqslant b_2 \\ \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ \quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geqslant b_m \\ \quad\quad x_1 \ , \quad x_2 \ , \ \ldots \ , \quad x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

Ce problème n'est rien d'autre qu'un problème de mélange. Il se présente dans de nombreuses situations, par exemple, le cas de la composition d'un régime alimentaire pour animaux.

4. Formulation d'un problème linéaire

2 Méthode graphique

Dans ce chapitre nous présentons une technique de résolution de programme linéaire à deux variables x_1 et x_2. Dans ce cas on peut utiliser une représentation graphique du programme linéaire. La représentation graphique sera utile pour acquérir une compréhension intuitive des principes de base de la programmation linéaire. La formulation canonique d'un programme linéaire à deux variables peut s'écrire sous l'une des deux formes suivantes :

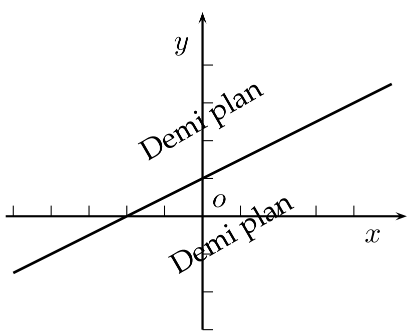
$$(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} \text{Max } z = \mathrm{a}_0 x_1 + \mathrm{b}_0 x_2 \\ \qquad \mathrm{a}_1 x_1 + \mathrm{b}_1 x_2 \leqslant \mathrm{c}_1 \\ \qquad \mathrm{a}_2 x_1 + \mathrm{b}_2 x_2 \leqslant \mathrm{c}_2 \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad x_1 \;,\; x_2 \geqslant 0 \end{cases} \qquad (\mathrm{D}) \quad \begin{cases} \text{Min } z = \mathrm{a}_0 x_1 + \mathrm{b}_0 x_2 \\ \qquad \mathrm{a}_1 x_1 + \mathrm{b}_1 x_2 \geqslant \mathrm{c}_1 \\ \qquad \mathrm{a}_2 x_1 + \mathrm{b}_2 x_2 \geqslant \mathrm{c}_2 \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad x_1 \;,\; x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Quelques rappels de géométrie

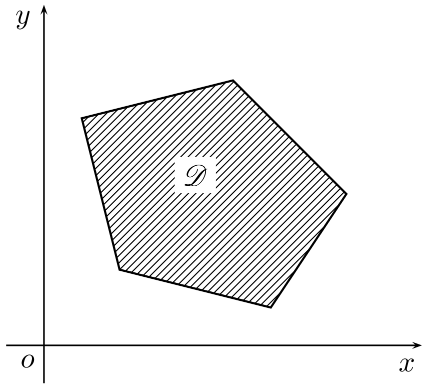
1.1. La construction de la région réalisable

Chacune des équations $\mathrm{a}_i x_1 + \mathrm{b}_i x_2 = \mathrm{c}_i$ définit une droite qui partage le plan en deux demi-plans P_1 et P_2 d'équation :

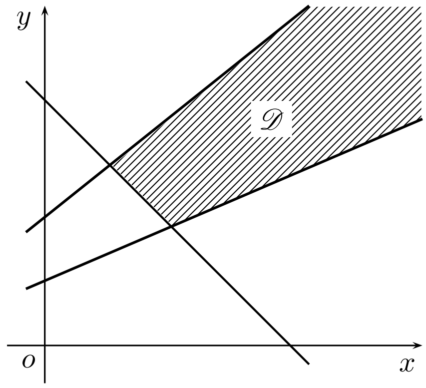
$$(\mathrm{P}_1) \quad \mathrm{a}_i x_1 + \mathrm{b}_i x_2 \geqslant \mathrm{c}_i, \qquad (\mathrm{P}_2) \quad \mathrm{a}_i x_1 + \mathrm{b}_i x_2 \leqslant \mathrm{c}_i$$



Chaque contrainte détermine l'un des deux demi-plans (P_1) ou (P_2) que l'on trouvera en vérifiant si un point particulier (l'origine $(0, 0)$ par exemple) est contenu dedans ou non. L'intersection de tous les demi-plans correspondant aux contraintes constitue l'ensemble des points réalisables : ce sont les solutions communes à toutes les contraintes. Cet ensemble correspond à une région $\mathscr{D}$ du plan et est souvent appelée région réalisable. Cette région est parfois vide ou non borné.



Région borné



Région non borné

1.2. La recherche d'une solution optimale

Nous venons de construire la région réalisable d'un programme linéaire à deux variable. Cet ensemble contient un nombre infini de solutions réalisables. Il reste à repérer, parmi ces solutions réalisables celle(s) qui donne(nt) à z la meilleur valeur.

En fixant z à une valeur p choisie arbitrairement, on obtient la droite :

$$(\mathrm{D}_p) \quad \mathrm{a}_0 x_1 + \mathrm{b}_0 x_2 = p$$

Cette droite est appelé **droite d'iso-valeur** de fonction z. Elle représente les points du plan qui donnent à z la valeur p.

On s'intéresse à la famille des droites (D_p) (p paramètre). Ce sont toutes des droites parallèles de pente : $-\frac{a}{b}$, que l'on peut écrire :

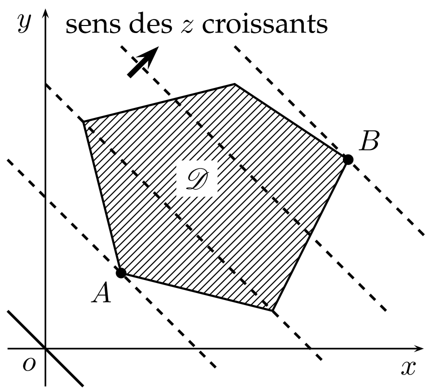
$$x_2 = -\frac{\mathrm{a}_0}{\mathrm{b}_0} x_1 + \frac{p}{\mathrm{b}_0} \qquad (\text{si } \mathrm{b}_0 \neq 0).$$

Ici $y_p = \frac{p}{\mathrm{b}_0}$ est l'ordonnée à l'origine de la droite (D_p). Ainsi, on a :

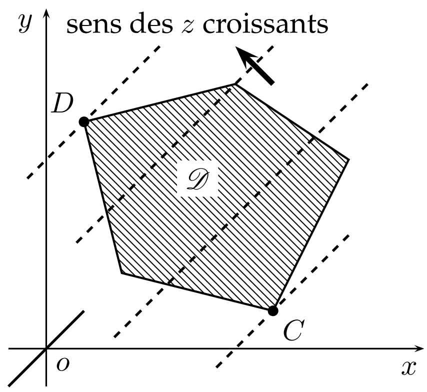
$$\text{Si} \quad \mathrm{b}_0 > 0 \quad \text{alors} \quad p_1 < p_2 \iff y_{p_1} < y_{p_2}$$

$$\text{Si} \quad \mathrm{b}_0 < 0 \quad \text{alors} \quad p_1 < p_2 \iff y_{p_1} > y_{p_2}$$

— Si $\mathrm{b}_0 > 0$, maximiser z revient à maximizer p et donc y_p. Donc le maximum de z est obtenu pour la droite ayant au moins un point commun avec la région réalisable et ayant une ordonnée à l'origine la plus *élevée* possible.

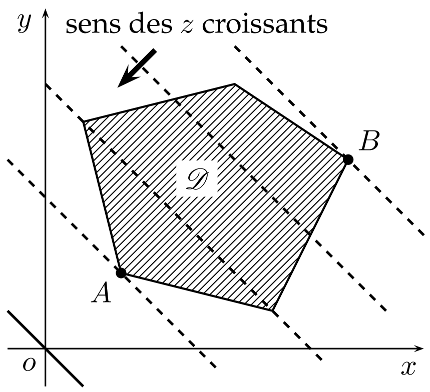


Cas $\mathrm{b}_0 > 0$ et $\mathrm{a}_0 > 0$

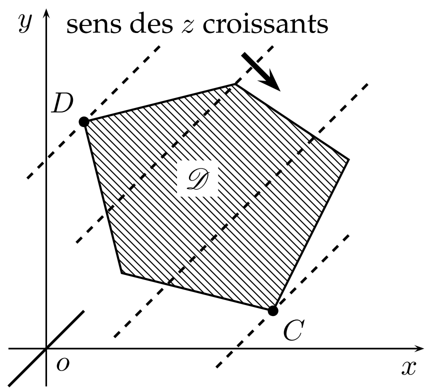


Cas $\mathrm{b}_0 > 0$ et $\mathrm{a}_0 < 0$

— Si $\mathrm{b}_0 < 0$, maximiser z revient à maximizer p et donc à minimiser y_p. Donc, le maximum de z est obtenu pour la droite ayant au moins un point commun avec la région réalisable et ayant une ordonnée à l'origine la plus *basse* possible.



Cas $\mathrm{b}_0 < 0$ et $\mathrm{a}_0 > 0$



Cas $\mathrm{b}_0 < 0$ et $\mathrm{a}_0 < 0$

Tous les points sur une même droite assurent la même valeur pour z. Quand on passe d'une droite à une autre, les valeur de z varient : ils augmentent si on se déplace dans le sens du vecteur normal $\overrightarrow{n}(\mathrm{a}_0, \mathrm{b}_0)$ au droites iso-valeurs : d'où la signification de la flèche indiquant le « sens des z croissants ».

2. Problème de maximisation

2.1. Enoncé du problème

Une entreprise de fabrication de chassis envisage la production de deux nouveaux modèles au moyen des capacités de ses trois ateliers. Il s'agit respectivement d'un chassis en aluminium et d'un chassis en bois. Le premier produit nécessite le passage dans le premier atelier pour fabriquer le cadre en aluminium et dans le troisième atelier où le verre est monté sur le chassis. Tandis que le second produit nécessite le passage dans le deuxième atelier pour fabriquer le cadre en bois et dans le troisième atelier où le verre est monté sur le chassis. Les profits unitaires, les temps de fabrication de chacun des produits dans chacun des ateliers ainsi que les capacités hebdomadaires de ces ateliers sont donnés au tableau suivant :

	Produit 1 (heures/produit)	Produit 2 (heures/produit)	Capacité disponible (heures/semaine)
Atelier 1	1	0	4
Atelier 2	0	2	12
Atelier 3	3	2	18
Profit	300 dh	500 dh	

La question qui se pose est la suivante : "Combien faut-il produire de chassis de chaque type par semaine afin d'obtenir un profit maximal ?"

2.2. Le modèle linéaire

Quelles sont les quantités de chassis que l'entreprise devrait produire par semaine, si elle veut maximiser son profit ? Les variables de décision seront :

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{nombre de chassis de type 1 à produire par semaine} \\ x_2 &= \text{nombre de chassis de type 2 à produire par semaine} \end{aligned}$$

Le problème de planification de la production de chassis se traduit par le modèle linéaire suivant :

$$(\mathrm{P}) \quad \left\{ \begin{array}{lrll} \text{Max } z = 300x_1 + 500x_2 & & & \\ x_1 & \leqslant 4 & \text{(atelier 1)} & \text{(A1)} \\ 2x_2 & \leqslant 12 & \text{(atelier 2)} & \text{(A2)} \\ 3x_1 + 2x_2 & \leqslant 18 & \text{(atelier 3)} & \text{(A3)} \\ x_1 & \geqslant 0 & & \\ x_2 & \geqslant 0 & & \end{array} \right.$$

A chaque couple de valeurs des variables de décision x_1 et x_2 on associe un point (x_1, x_2) du plan $\mathbb{R}^2$: le point (x_1, x_2) s'interprète comme la proposition d'un plan de production indiquant le nombre de chassis à fabriquer par semaine. Généralement, on parle indifféremment du **point** (x_1, x_2) ou du **plan de production** (x_1, x_2) ou encore de la **solution** (x_1, x_2).

2.3. Construction de la région réalisable

Les contraintes $x_1 \geqslant 0$ et $x_2 \geqslant 0$ signifient que tous les points (x_1, x_2) représentant des solutions acceptables doivent être dans le premier quadrant, soit à droite de l'axe Ox_2 et au-dessus de l'axe Ox_1.

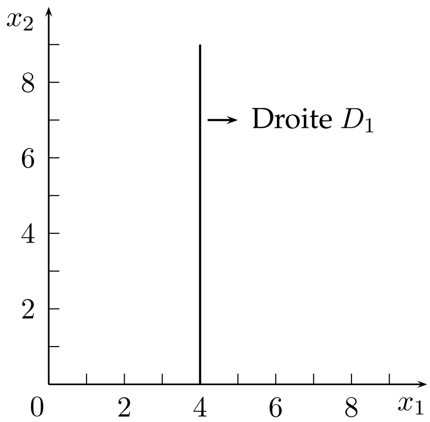
Notons que toutes les contraintes du modèle, y inclus les contraintes de non-négativité, peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathrm{a}x_1 + \mathrm{b}x_2 \leqslant \mathrm{c}$$

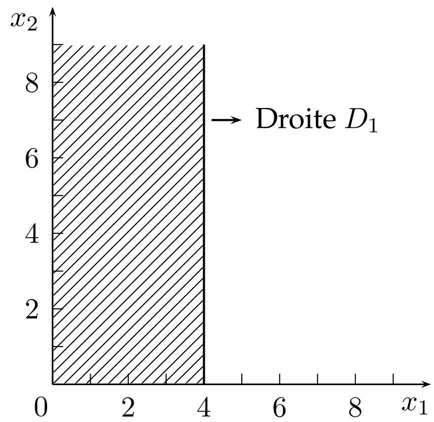
Pour préciser la procédure qui mène à la représentation graphique de la région réalisable, considérons tout d'abord la contrainte relative à l'atelier 1. La droite associée à cette contrainte est la droite d'équation :

$$x_1 = 4 \tag{1}$$

La représentation graphique de l'équation (1) s'obtient en traçant la droite verticale qui passe par le point $(4,0)$. La contrainte $(A1)$ est satisfaite pour les points du plan du même côte de la droite (1) que l'origine du repère.



droite associée à la 1ère contrainte



prise en compte de la 1ère contrainte

Puisque toutes les contraintes du modèle linéaire sont de la même forme, il suffit de les prendre en considération tour à tour, en procédant, pour chaque contrainte, comme suit :

— choisir 2 points de la droite associée. Afin de faciliter les calculs, on peut choisir les deux points ayant chacun une coordonnée nulle. Puis tracer cette droite ;

— déterminer de quel côté de la droite associée la contrainte est satisfaite. Pour repérer rapidement le bon côte, il suffit de regarder si le point $(0,0)$ est du bon côte ;

— tracer une flèche pointant vers ce côté.

Illustrons à nouveau cette procédure à l'aide de la contrainte $(A2)$. La droite associée à cette contrainte est la droite d'équation :

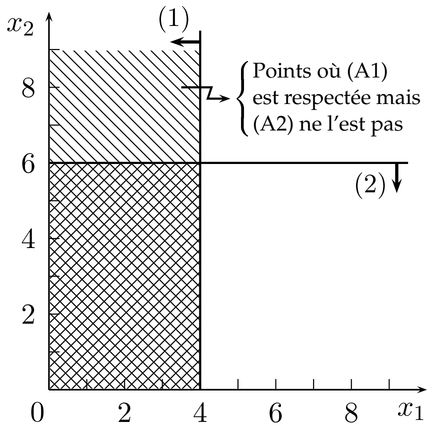
$$x_2 = 6 \tag{2}$$

— les points $(0, 6)$ et $(8, 6)$ appartiennent à la droite (2) associée à $(A2)$;

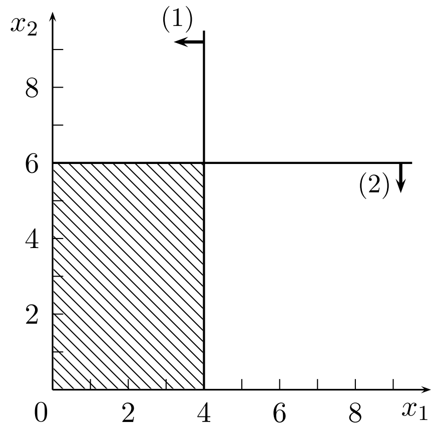
— le point $(0, 0)$ vérifie cette dernière et les points réalisables selon la seule contrainte $(A2)$ se trouvent sous la droite (2) ;

— la flèche pointant vers le bon côté est placée.

Le résultat graphique de la prise en considération des contraintes (A1) et (A2) est illustré sur la figure suivante :



effet de la 2ème contrainte

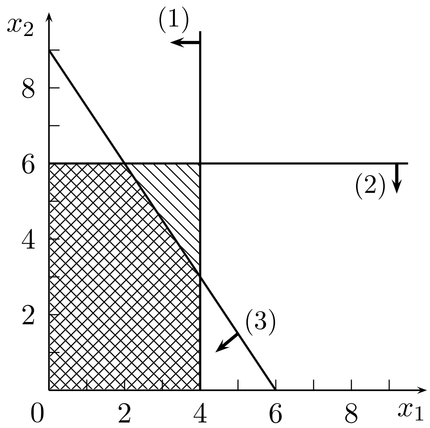


prise en compte des contraintes (A1) et (A2)

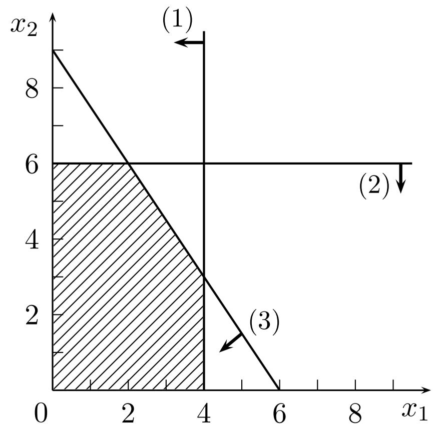
La prise en considération graphique de la contrainte (A3) se traduit par le tracé de la droite d'équation :

$$3x_1 + 2x_2 = 18 \tag{3}$$

et par l'exclusion des points situés au-dessus de cette droite.



effet de la 3ème contrainte



prise en compte de toutes les contraintes

L'ensemble des points qui n'ont pas été éliminés après la prise en considération de toutes les contraintes constitue la région réalisable. En économie, cet ensemble est aussi appelé **l'ensemble de production**.

2.4. Recherche d'une solution optimale

La région réalisable que nous venons de construire ne détermine pas une solution, mais tout un domaine contenant un nombre infini de points. Il va falloir repérer un plan de production optimal, c'est-à-dire un point (x_1^*, x_2^*) vérifiant toutes les contraintes et permettant à z de prendre sa plus grande valeur sur la région réalisable.

Pour cela, on va considérer des valeurs successives de la fonction économique :

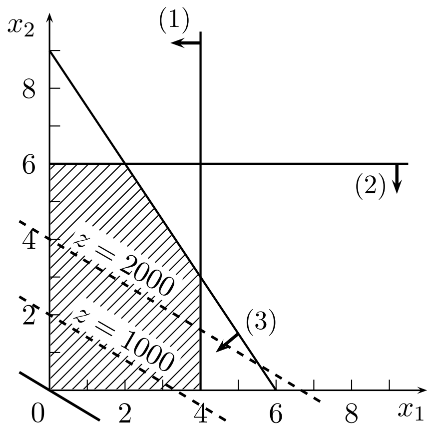
$$z = p.$$

Ce qui correspond graphiquement à des droites parallèles

$$300x_1 + 500x_2 = p. \tag{4}$$

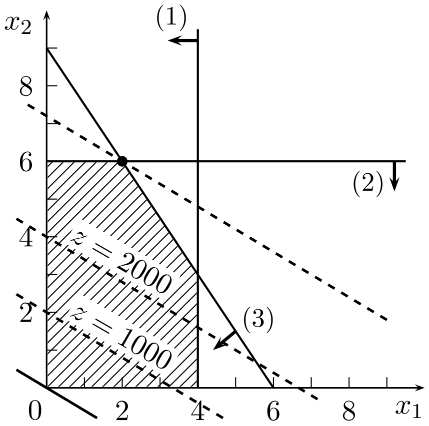
Les points d'une de ces droites sont donc le lieu de tous les points donnant la même valeur du profit (d'où le nom de droites d'isoprofits).

Tracer une première droite d'isoprofit permet d'obtenir une illustration de la pente de z. En tracer une deuxième permet de déterminer la direction selon laquelle la valeur de z augmente. Ainsi, en augmentant petit à petit la valeur de p dans l'équation (4), on obtient des droites parallèles, chacune plus loin de l'origine que les précédentes.

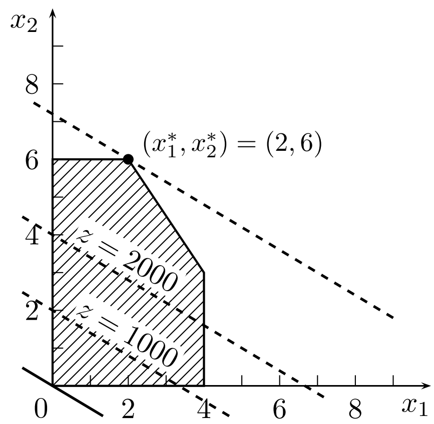


droites d'isoprofits $z = 0$, $z = 1000$ et $z = 2000$

Comme on cherche ici à maximiser la fonction économique z, on détermine une solution optimale en cherchant la droite d'isoprofit la plus élevée qui comporte au moins un point de la région réalisable.



droite d'isoprofit la plus élevée



repérage de la solution graphique

Ici, il n'y a qu'une seule solution optimale qu'est le point

$$(x_1^*, x_2^*) = (2, 6)$$

Ce point se trouve à l'intersection des droites (2) et (3). On utilise donc à plein les capacités disponibles des ateliers 1 et 2. Par contre, pour cette solution optimale, les capacités disponibles de l'atelier 1 seront plus que suffisantes. Au point optimal, la fonction économique prend la valeur 3600 :

$$z^* = (300 \times 2) + (500 \times 6) = 3600$$

3. Problème de minimisation

3.1. Enoncé du problème

Une entreprise a besoin de trois matières premières A, B et C pour fabriquer un produit. Il lui faut au moins 14 kg de A, 12 kg de B et 18 kg de C. Il ne peut acheter que les mélanges X et Y. Le produit X contient 2 kg de A, 1 kg de B et 1 kg de C. Le produit Y contient 1 kg de A, 1 kg de B et 3 kg de C. Le produit X coûte 20 dh et Y coûte 40 dh. Par ailleurs il ne peut pas acheter plus de 22 kg de X et ?? kg de Y

La question qui se pose est la suivante : "Quelle quantité de X et Y doit-on acheter pour répondre aux besoins de l'entreprise au moindre coût ?"

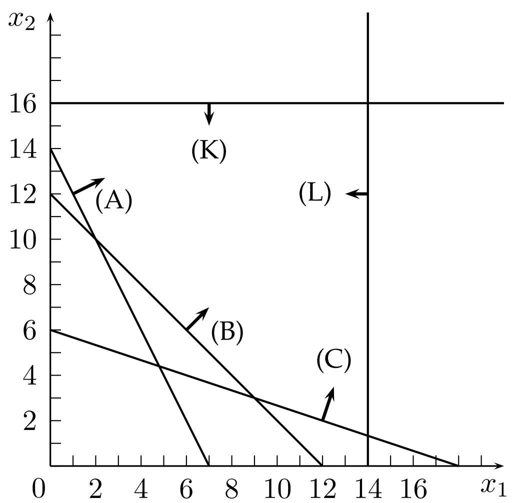
3.2. Formulation et résolution graphique

Appelons x_1 et x_2 les quantités de X et Y à acheter. On obtient aisément le programme linéaire suivant :

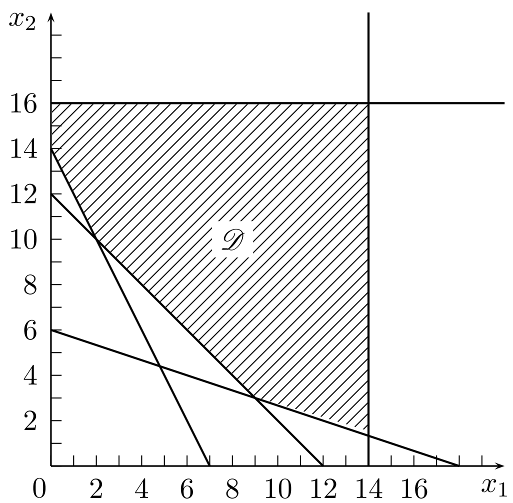
$$
(\mathrm{P}) \quad \left\{
\begin{array}{lrcrcrl}
\text{Min } z = 20x_1 + 40x_2 & & & & & & \quad (\mathrm{O}) \\
& 2x_1 & + & x_2 & \geqslant & 14 & \quad (\mathrm{A}) \\
& x_1 & + & x_2 & \geqslant & 12 & \quad (\mathrm{B}) \\
& x_1 & + & 3x_2 & \geqslant & 18 & \quad (\mathrm{C}) \\
& x_1 & & & \leqslant & 14 & \quad (\mathrm{L}) \\
& & & x_2 & \leqslant & 16 & \quad (\mathrm{K}) \\
& x_1 & , & x_2 & \geqslant & 0 &
\end{array}
\right.
$$

Les contraintes (A), (B) et (C) s'écrivent « $\geqslant$ » parce qu'il faut respecter les besoins minimaux en matières premières, mais ceux-ci peuvent être dépassées.
Ce programme diffère du programme précédent sous 2 aspects : la fonction économique s'est à minimiser ; certaines contraintes sont de signe « $\geqslant$ » et l'origine $\mathrm{O} = (0,0)$ du plan n'est pas une solution réalisable.

La technique de résolution graphique reste la même, mais, puisqu'il s'agit de la recherche d'un minimum, la droite iso-valeur le plus proche de l'origine et qui reste en contact avec la région réalisable, fournit le minimum.
En premier temps, nous construisons la région réalisable. La zone hachurée dans le graphe ci-dessous est l'ensemble des points satisfaisant à toutes les contraintes.

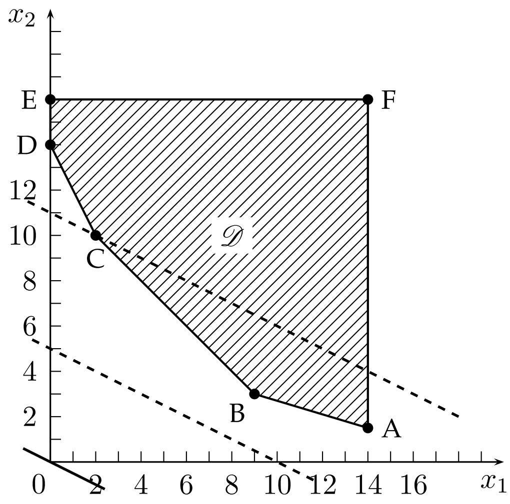


repérage des bons côtés

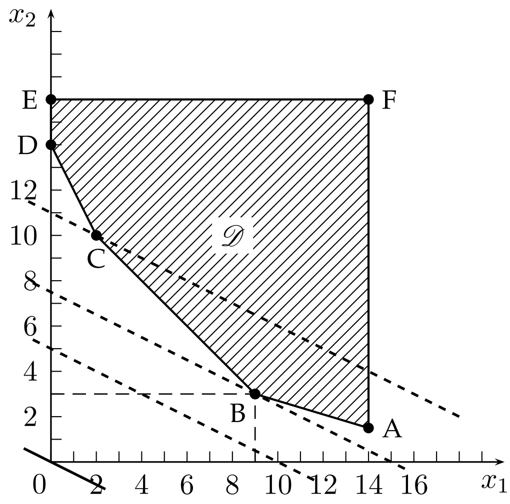


région réalisable

Le polyèdre ABCDEF, qui constitue la région réalisable, est reproduit a la figure suivante, accompagné des droites isocoûts $z = 0$, $z = 100$ et $z = 440$. Comme l'objectif est de minimiser z, l'optimum s'atteint en cherchant la droite d'isocoût la plus basse possible qui touche la région réalisable $\mathscr{D}$.



isocoûts $z = 0$, $z = 200$ et $z = 440$.



le sommet B correspond à la solution optimale

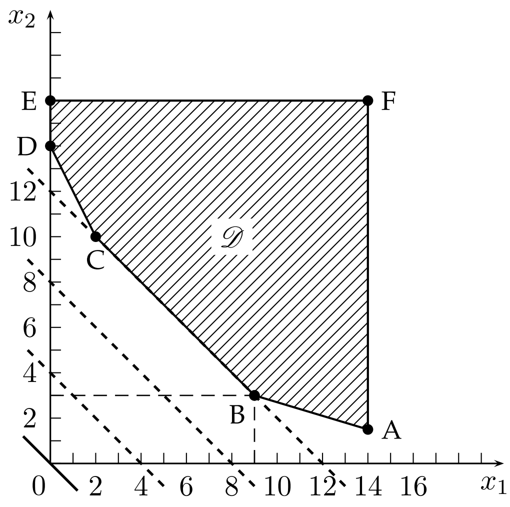
Le graphique indique le sommet B=(9,3) comme le point où s'obtient la solution optimale recherchée. Le coût au point B est inférieur à celui qui correspond à tous les autres sommets de la région réalisable. On confirme ce résultat en évaluant la fonction économique en chacun des sommets voisins à B :

$$\begin{array}{llll}
\text{en} & A = (14, 1) & z = (20 \times 14) + (40 \times 1) & = 320 \\
\text{en} & B = (9, 3) & z = (20 \times 9) \;\; + (40 \times 3) & = 300 \\
\text{en} & C = (2, 10) & z = (20 \times 2) \;\; + (40 \times 10) & = 440
\end{array}$$

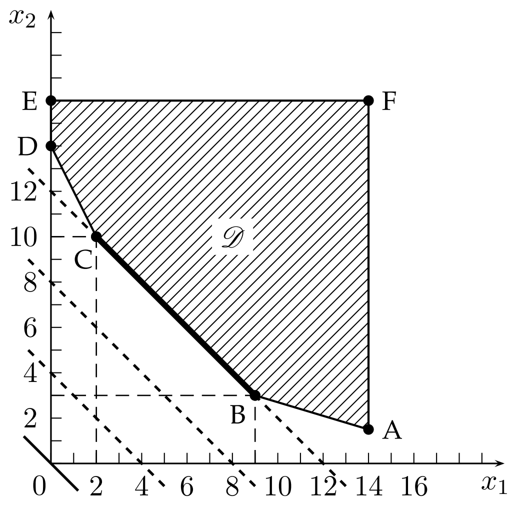
Supposons que le coût du produit X augmente de 20 dh. La fonction économique devient :

$$\text{Min } z = 40x_1 + 40x_2$$

Cherchons la valeur minimale de z graphiquement. On obtient



isocoûts parallèles à une contrainte



solutions optimales multiples

Comme la droite d'isocoût la plus basse possible est tangente à la contrainte (B), la valeur minimale serait attente aux sommets $\mathrm{B}(9,3)$ et $\mathrm{C}(2,10)$. De plus, tout point du segment $[\mathrm{B},\mathrm{C}]$ minimisera la fonction économique sous les contraintes posées. Cette multiplicité des solutions optimales provient du fait que les droites d'isocoûts sont parallèles à la droite associée à la contrainte (B).

3 Algorithme du simplexe
Méthode algébrique

Nous avons résolu des cas de programmes linéaires simples : deux variables et trois ou cinq contraintes. Au fur et à mesure que le nombre des contraintes s'accroît, la méthode graphique s'avère de plus en plus difficile à mettre en œuvre. En présence de trois variables, nous devons faire appel à une représentation graphique dans l'espace, exercice très délicat ... Or, dans la pratique, les programmes linéaires comportent plusieurs dizaines de variables et de contraintes. Ainsi, le recours à une méthode générale devient indispensable.

L'algorithme du simplexe est la plus utilisée des méthodes de résolution des programmes linéaires. Il a été mis au point en 1948 par B. Dantzig. Depuis, cet algorithme a fait l'objet de certaines d'articles scientifiques et a servi à la résolution de nombreux modèles linéaires

1. Principe de l'algorithme

Lorsqu'on considère un programme linéaire ayant plus de 2 variables, la résolution graphique devient difficile, mais les propriétés restent les mêmes. Si la fonction objectif peut avoir une valeur optimale dans la région réalisable, celle-ci se trouve en un des sommets de la région réalisable. Pour atteindre la valeur optimale, seuls les sommets doivent donc être examinés.

On pourrait donc en déduire qu'il suffit de calculer la valeur de la fonction objectif à chaque sommet et de choisir finalement la plus grande de ces valeurs ; mais cette approche est impraticable pour les grands programmes : un programme de 100 variables et 10 contraintes, qui est un programme de taille moyenne, sinon faible, aurait déjà plus de 1 730 milliards de sommets!

Une procédure "intelligente" est donc nécessaire : l'algorithme du simplexe utilise une procédure itérative qui permet de trouver la valeur optimale ou, à défaut, met en évidence que la région réalisable est vide.

Le principe de l'algorithme du simplexe est le suivant :

Phase I : procédure d'initialisation

Déterminer un premier sommet de la région réalisable $\mathscr{D}$. Si cette procédure échoue, cela signifie que la région réalisable $\mathscr{D}$ est vide ;

Phase II : procédure itérative

Passer d'un sommet de $\mathscr{D}$ à un autre sommet voisin de $\mathscr{D}$, de façon à améliorer chaque fois la valeur de la fonction objectif. Ce nouveau sommet sera voisin au précédent en ce sens qu'ils seront les deux extrémités d'une arête de $\mathscr{D}$;

Test d'arrêt : procédure d'arrêt

Deux tests d'arrêt permettent de savoir si l'on doit arrêter le calcul, parce qu'on a atteint une solution optimale ou parce qu'il n'existe pas de de solution optimale finie, ou si l'on doit passer vers un nouveau sommet.

Soit le programme linéaire de maximisation sous la forme standard

$$\begin{cases} \text{Max } z = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} \\ \qquad\quad \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \qquad\quad\;\; \boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0} \end{cases}$$

avec $\mathbf{A}$ de type (m, n) et de rang m, $\boldsymbol{x}$ de type $(1, n)$ et $\boldsymbol{b}$ de type $(m, 1)$.

Nous décrirons le déroulement de la méthode du simplexe en l'appliquant au modèle de fabrication des chassis (FC) introduit au chapitre 2. Rappelons qu'après l'ajout d'une variable d'écart dans chaque contrainte réelles, le programme (FC) se réécrit sous la forme

$$(\text{FC}) \quad \begin{cases} \text{Max } z = 300x_1 + 500x_2 \\ \begin{array}{rrrrrcr} x_1 & & +\,x_3 & & & = & 4 \\ & 2x_2 & & +\,x_4 & & = & 12 \\ 3x_1 + & 2x_2 & & & +\,x_5 & = & 18 \\ x_1\;\;, & x_2 & ,\,x_2 & ,\,x_4 & ,\,x_5 & \geqslant & 0 \end{array} \end{cases}$$

2. Caractérisation algébrique des sommets

Les sommets ont été définis géométriquement. Il faut transcrire cette définition en termes algébriques pour décrire notre procédure. Pour effectuer cette description, il faut que le programme linéaire soit sous la forme standard.

Soit $\mathbf{B}$ une sous matrice de $\mathbf{A}$ qui est carrée inversible d'ordre m. Nous dirons que $\mathbf{B}$ est une **base**.

Soit $\mathbf{B}$ une base. Alors en permutant les colonnes de $\mathbf{A}$, on peut toujours mettre $\mathbf{A}$ sous la forme :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{H} \end{pmatrix}$$

où $\mathbf{H}$ est la sous-matrice formée par les colonnes de $\mathbf{A}$ qui ne sont pas dans la base. De même on peut partitionner $\boldsymbol{x}$ en $(\boldsymbol{x}_B\ \boldsymbol{x}_H)^t$ et $\boldsymbol{c}$ en $(\boldsymbol{c}_B\ \boldsymbol{c}_H)^t$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \text{Max}\ \ z = \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{x}_B &+ \boldsymbol{c}_H\boldsymbol{x}_H \\ \mathbf{B}\boldsymbol{x}_B &+ \mathbf{H}\boldsymbol{x}_H = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} &\geqslant \mathbf{0} \end{aligned} \tag{$*$}$$

Les m composantes de $\boldsymbol{x}_B$ sont appelées **variables de base**. Les $n-m$ composantes de $\boldsymbol{x}_H$ sont appelées **variables hors base**.
La solution du système $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ obtenue en posant $\boldsymbol{x}_H$ est appelée la solution de base associée à la base $\mathbf{B}$. Cette solution de base est donc

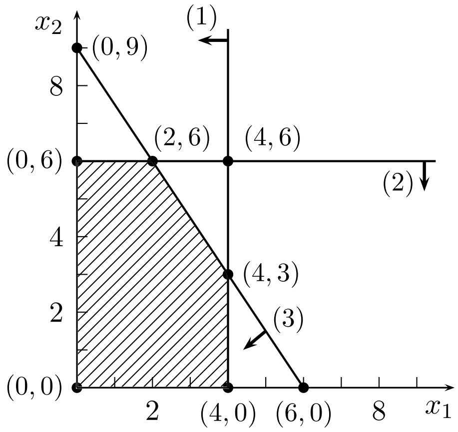
$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{x}_B &= \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x}_H &= \mathbf{0} \end{aligned}}$$

Lorsque les variables de base sont positifs ($\boldsymbol{x}_B \geqslant 0$), la solution de base est *réalisable* et appartient à $\mathscr{D}$. Par extension, la base $\mathbf{B}$ sera dite *base réalisable*. Une solution de base est dite dégénérée si au moins une variable de base est nulle.

Propriété fondamentale

Le programme linéaire étant mis sous forme standard, chaque sommet de la région réalisable correspond à une et une seule solution de base réalisable et inversement.

On peut vérifier cette propriété sur l'exemple de fabrication des chassis (FC) dont la représentation graphique est donnée à la figure suivante. A la figure, les sommets $(0,0)$, $(0,6)$, $(2,6)$, $(4,3)$, $(4,0)$ correspondent à des solutions de base réalisables tandis que les points $(0,9)$, $(4,6)$ et $(6,0)$ correspondent à des solutions de base non réalisables ; comme le montre le tableau suivant



var. de base	(x_1, x_2)	sol. de base
x_3, x_4, x_5	$(0,0)$	$(4,12,18)$
x_2, x_3, x_5	$(0,6)$	$(6,4,6)$
x_2, x_3, x_4	$(0,9)$	$(9,4,-6)$
x_1, x_2, x_3	$(2,6)$	$(2,6,2)$
x_1, x_2, x_5	$(4,6)$	$(4,6,-6)$
x_1, x_2, x_4	$(4,3)$	$(4,3,6)$
x_1, x_4, x_5	$(4,0)$	$(4,6,6)$
x_1, x_3, x_4	$(6,0)$	$(6,-2,12)$

Correspondance entre solution de base réalisable et sommet

On appelle **solutions de base adjacentes** deux solutions de base dont les variables de base sont les mêmes sauf une qui est de base dans la première base et hors base dans la seconde.

Dans l'exemple (FC), les deux solutions de base suivantes sont adjacentes :

$$(x_1, x_2, \boldsymbol{x_3}, \boldsymbol{x_4}, \boldsymbol{x_5}) = (0, 0, 4, 12, 18), \qquad (x_1, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}, x_4, \boldsymbol{x_5}) = (0, 6, 4, 0, 6)$$

car elles ne diffèrent que par une seule variable hors base. Par contre les solutions suivantes :

$$(x_1, x_2, \boldsymbol{x_3}, \boldsymbol{x_4}, \boldsymbol{x_5}) = (0, 0, 4, 12, 18), \qquad (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}, x_4, x_5) = (2, 6, 2, 0, 0)$$

ne sont pas adjacentes puisqu'elles diffèrent pas plus d'une variable hors base.

3. Illustration de l'algorithme

Nous allons maintenant voir commet effectuer les procédures de l'algorithme du simplexe en utilisant uniquement l'algèbre.

3.1. Initialisation de l'algorithme

La question qui se pose est : "Commet choisir le point de départ ?"

Si les contraintes sont mis sous forme d'inégalités $\mathbf{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}$ avec $\boldsymbol{b} \geqslant \mathbf{0}$, il suffit de prendre l'origine comme point de départ. Dans l'exemple (FC), cela donne :

$$(x_1, x_2) = (0, 0)$$

En termes algébriques, toutes les variables de décision (originales) sont mises hors base. Automatiquement, dans le systèmes d'égalités :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & & & + & x_3 & & & & & = & 4 \\ & & 2x_2 & & & + & x_4 & & & = & 12 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & & & & & + & x_5 & = & 18 \end{array}\right.$$

on lit la valeur des variables de base :

$$x_3 = 4, \;\; x_4 = 12, \;\; x_5 = 18.$$

D'où la solution de **base réalisable de départ** :

$$(0, 0, 4, 12, 18)$$

Notons que si une composante du second membre $\boldsymbol{b}$ avait été négatif ou si une contrainte avait été sous forme d'égalité, on aurait pas pu démarrer ainsi. Ces embûches peuvent être levées en passant par une phase préliminaire appelée phase I de l'algorithme du simplexe.

Que vaut la fonction objectif pour cette première solution de base ?

$$z = 300x_1 + 500x_2 = 300 \times 0 + 500 \times 0$$

c'est-à-dire un bénéfice nulle, ce qui n'est pas étonnant. Cette solution correspond au plan de production : on ne produit rien, on n'utilise aucune ressource et on ne gagne rien.

La formulation de l'exemple (FC), sous la forme standard, permet d'exprimer facilement chaque variable d'écart (ici variable de base) ainsi que la fonction objectif z comme fonctions affines des variables de décision seulement (ici variables hors base) :

$$\begin{array}{|rclcrcr|}
\hline
x_3 & = & 4 & - & x_1 & & \\
x_4 & = & 12 & & & - & 2x_2 \\
x_5 & = & 18 & - & 3x_1 & - & 2x_2 \\
\hline
z & = & & & 300x_1 & + & 500x_2 \\
\hline
\end{array} \qquad \text{(Dic 1)}$$

Le tableau ci-dessus est appelé un dictionnaire. La solution de base de départ peut être résumée ainsi :

— variables hors-base : $x_1 = 0$, $x_2 = 0$;
— variables de base : $x_3 = 4$, $x_4 = 12$, $x_5 = 18$;
— la valeur de la fonction objectif : $z = 0$.

3.2. Passage d'un sommet à un autre

La phase II de l'algorithme du simplexe consiste à passer d'un sommet à un sommet adjacent de façon à améliorer chaque fois la fonction objectif z. Algèbriquement, cette opération correspond à un changement de base : la nouvelle base ne diffère de l'ancienne base que par une seule variable. On va donc se déplacer à partir de notre solution de base de départ vers une autre solution de base réalisable en suivant une arête le long de laquelle la valeur de z augmente.

Choix de la variable entrante

La question qui se pose est alors : commet choisir une arête le long de laquelle la valeur de z va augmenter ? Algèbriquement, cette question se formule de manière équivalente par : qu'elle variable hors base va entrer en base ?

On a :

$$z = 300x_1 + 500x_2$$

Pour obtenir une meilleure solution, il suffit de faire passer l'une des deux variables x_1 ou x_2 de la valeur **zéro** à une valeur **positive**. Il est donc préférable de choisir x_2 qui vaut 500 par unité alors que x_1 ne vaut que 300. On peut ainsi espérer aller "plus vite" vers la solution optimale. Par contre la valeur de x_1 restera nulle. Économiquement, on va donc produire des chassis de type 2 et toujours pas des chassis de type 1.

> Le critère de sélection de la variable entrante est donc le suivant : on choisit la variable avec le coefficient positif (de la fonction objectif) le plus élevé.

Notons que pour pouvoir appliquer ce critère simple (le choix de la variable entrante), la fonction objectif z doit être exprimée en fonction des seules variables hors base.

Choix de la variable sortante

On peut à présent se poser les deux questions suivantes :

a) jusqu'où peut-on augmenter la valeur de x_2 ?

b) quelle variable de base doit-elle sortir, c'est-à-dire doit-elle devenir hors base ? (Noter que le nombre des variables de base doit toujours être exactement égal à m, c'est-à-dire 3 dans notre exemple)

En supposant que x_1 reste hors base (et donc égal à 0) dans (Dic 1), on obtient les variations des variables de base en fonction de x_2 :

$$x_3 = 4 \tag{C1}$$
$$x_4 = 12 - 2x_2 \tag{C2}$$
$$x_5 = 18 - 2x_2 \tag{C3}$$

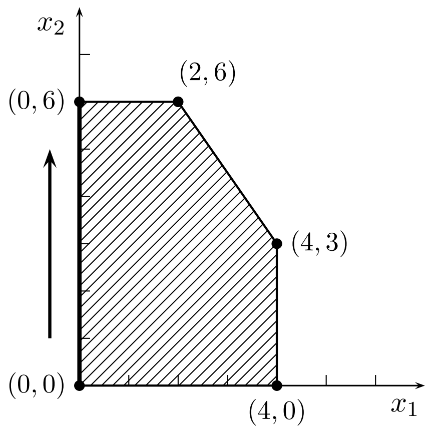
Mais pour conserver une solution réalisable et ne pas quitter la région réalisable, il faut aussi que les composantes restent positifs. Nous devons avoir $x_3 \geqslant 0$, $x_4 \geqslant 0$ et $x_5 \geqslant 0$. En fait :

$$\begin{aligned} x_3 &= 4 \geqslant 0 \\ x_4 &= 12 - 2x_2 \geqslant 0 \\ x_5 &= 18 - 2x_2 \geqslant 0 \end{aligned} \qquad \text{ou encore} \qquad \begin{aligned} x_2 &\leqslant \frac{12}{2} = 6 \\ x_2 &\leqslant \frac{18}{2} = 9 \end{aligned}$$

La contrainte (C1) ne place aucune restriction sur l'augmentation de x_2 car elle ne contient pas x_2. Au total, la contrainte la plus restrictive pour x_2 est (C2). Il faut donc s'arrêter à la valeur $x_2 = 6$ (c'est une réponse à la question **a**) pour la quelle la variable x_4 dévient nulle et aller au delà conduirait à la rendre négative. Donc, on peut supposer que x_4 est à présent hors base (c'est une réponse à la question **b**). On en conclut que la variable sortante est x_4, c'est-à-dire la première qui s'annule lorsque x_2 s'accroît à partir de 0.

> On effectue les rapports des seconds membres des contraintes aux coefficients correspondants de la variable entrente. La variable sortante correspond au plus petit rapport positif.

Géometriquement, en partant du sommet $(0,0)$ de la région réalisable $\mathscr{D}$, on se déplace sur une arête de $\mathscr{D}$ (l'axe des x_2). Lorsque la variable d'écart x_4 devient nulle, cela veut dire qu'on a rencontré la droite associée à la deuxième contrainte. On arrive alors dans un nouveau sommet, à l'intersection des hyperplans $x_1 = 0$ et $x_4 = 0$ (dans $\mathbb{R}^5$) c'est-à-dire l'intersection des droite $x_1 = 0$ et $x_2 = 6$ (dans $\mathbb{R}^2$)



le cheminement du sommet initial vers le nouveau sommet

Calcul du nouveau sommet

La question qui se pose est : commet calculer la nouvelle solution de base ?

On va y répondre en utilisant la résolution des systèmes. Plus précisément, on va faire un changement de dictionnaire en échangeant les rôles des x_2 et x_4. On utilise la deuxième équation du (Dic 1) pour exprimer x_2 en fonction des nouvelles variables hors base, x_1 et x_4 :

$$x_2 = 6 - \frac{1}{2}x_4$$

On remplace ensuite x_2 par cette expression dans les autres équations du dictionnaire :

$$\begin{array}{|rcrcrcr|}
\hline
x_3 & = & 4 & - & x_1 & & \\
x_2 & = & 6 & & & - & \frac{1}{2}x_4 \\
x_5 & = & 6 & - & 3x_1 & + & x_4 \\
\hline
z & = & 3000 & + & 300x_1 & - & 250x_4 \\
\hline
\end{array} \qquad \text{(Dic 2)}$$

La première itération est terminée. La deuxième solution de base peut être résumée ainsi :

— variables hors-base : $x_1 = 0$, $x_4 = 0$;
— variables de base : $x_2 = 6$, $x_3 = 4$, $x_5 = 6$;
— la valeur de la fonction objectif : $z = 3000$.

Elle correspond au sommet $(0, 6)$ de la région réalisable. Économiquement, cette solution définit un plan de production beaucoup plus intéressant : on fabrique 6 chassis du type 2 ($x_2 = 2$) en consommant entièrement la capacité de production de l'atelier 2 et $x_5 = 6$ unités de la capacité de production de l'atelier 3. La capacité de fabrication de l'atelier 1 n'est pas encore utilisé ($x_3 = 4$). Le profit est $z = 3000$.

Test d'arrêt

La question qui se pose maintenant est : commet savoir le fait que la solution optimale est trouvée ?

Un sommet est optimal si tous les sommets adjacents donnent des valeurs inférieures ou égales à la fonction objectif. Comment peut-on savoir s'il existe encore un sommet adjacent profitable ?

Pour répondre à cette question, nous allons examiner la nouvelle expression de la fonction z. La dernière équation du dictionnaire (Dic 2) :

$$z = 3000 + 300x_1 - 250x_2$$

Comme x_1 a un coefficient positif, il est intéressant de faire entrer x_1 en base, ce qui entraîne une deuxième itération.

> Le critère d'arrêt sera donc le suivant : la solution de base courante est optimale si tous les coefficients de la fonction objectif z sont négatifs ou nuls lorsque z est exprimée en fonction des seuls variables hors base.

Deuxième itération

Au vu de

$$z = 3000 + 300x_1 - 250x_2$$

on sélectionne donc pour la variable entrante x_1. En effet, c'est la variable ayant le plus grand coefficient positif, et d'ailleurs la seule possible.

Pour déterminer la variable sortante, étudions la variation des variables de base en fonction d'une augmentation de x_1. On a les limites suivantes :

$$\begin{aligned} x_3 &= 4 - x_1 \geqslant 0 \\ x_2 &= 6 \geqslant 0 \\ x_5 &= 6 - 3x_1 \geqslant 0 \end{aligned} \quad \text{ou encore} \quad \begin{aligned} x_1 &\leqslant 6 \\ \\ x_1 &\leqslant 2 \end{aligned}$$

La variable sortante est x_5, c'est elle qui est la première à s'annuler (pour $x_1 = 2$). Pour calculer le nouveau sommet, on utilise la troisième équation du (Dic 2) pour exprimer x_2 en fonction des nouvelles variables hors base, x_5 et x_4 :

$$x_1 = 2 - \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_4$$

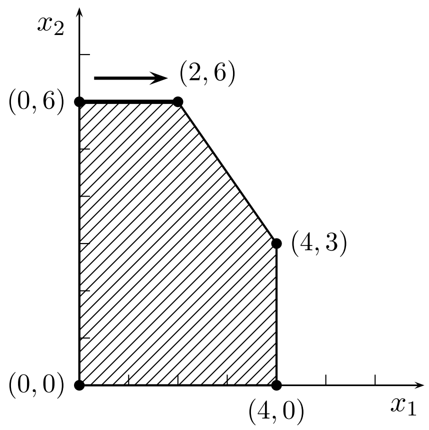
On remplace ensuite x_1 par cette expression dans les autres équations du dictionnaire :

$$\begin{array}{|rclclcl|} x_3 & = & 2 & - & \frac{1}{3}x_5 & + & \frac{1}{3}x_4 \\ x_2 & = & 6 & & & - & \frac{1}{2}x_4 \\ x_1 & = & 2 & - & \frac{1}{3}x_5 & + & \frac{1}{3}x_4 \\ \hline z & = & 3600 & - & 100x_5 & - & 150x_4 \end{array} \qquad \text{(Dic 3)}$$

La deuxième itération est terminée. La troisième solution de base peut être résumée ainsi :

— variables hors-base : $x_4 = 0$, $x_5 = 0$;
— variables de base : $x_1 = 2$, $x_2 = 6$, $x_3 = 2$;
— la valeur de la fonction objectif : $z = 3600$.

Elle correspond au sommet $(2, 6)$ de la région réalisable. Économiquement, cette solution définit le plan de production suivant : on fabrique 2 chassis du type 1 et 6 chassis du type 2 en consommant entièrement les capacités de production des ateliers 2 et 3. Le profit est $z = 3600$.



le cheminement du sommet $(0, 6)$ vers le sommet $(2, 6)$

Tous les coefficients de la dernière ligne, dans (Dic 3), sont négatifs :

$$z = 3600 - 100x_5 - 150x_4$$

Faire « entrer » x_5 ou x_4 diminuera la valeur de z. Il n'est plus possible d'améliorer z. La solution courant

$$x_1^* = 2, \quad x_2^* = 6$$

est optimale et donne la valeur maximal à la fonction objectif : $z^* = 3600$.

4. Algorithme du simplexe

Étape 0. Initialisation

- Écrire le programme linéaire sous standard : Ajouter les variables d'écart.
- Définir une solution de base de départ ; préciser les variables de base et les variables hors base de cette solution. Généralement, les variables d'écart sont pris comme variables de base et les variables de décision comme variables hors base.

Étape 1. Choix de la variable entrante

- Exprimer la fonction objectif z en fonction des seules variables hors base. Puis choisir comme variable entrante la variable hors base affectée du coefficient positif le plus élevé.
- Si tous les coefficients de z sont négatifs ou nuls, l'algorithme s'arrête. La solution courante est optimale.
- Sinon, soit r l'indice de cette variable entrante.

Étape 2. Choix de la variable sortante

- La variable sortante est la première à s'annuler lorsque x_r augmente : c'est celle pour laquelle le minimum est atteint dans :

  $$\frac{b_s}{a_{sr}} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ir}} \ : \ a_{sr} > 0, \ i = 1, \ldots, m\right\}$$

  s est l'indice de la ligne correspondante.
- Si tous les a_{sr} sont inférieurs à 0, alors la solution est non borné.

Étape 3. Calcul de la nouvelle solution de base

- Utiliser l'équation relative à la variable x_s pour exprimer x_r en fonction de x_s et les autres variables qui vont rester dans la base.
- Éliminer x_r des autres équations en la remplaçant par son expression.
- Retour à l'**Étape 1**.

5. Application

5.1. Énonce du problème

Une entreprise fabrique quatre produits. La fabrication de chaque produit nécessite une certaine quantité de ressources. Les ressources consommées, les stocks des ressources et les bénéfices des produits sont récapitulés dans le tableau suivant :

	Produit 1	Produit 2	Produit 3	Produit 4	Stock
Ressource A	2	4	5	7	42
Ressource B	1	1	2	2	17
Ressource C	1	2	3	3	24
Bénéfice	7	9	18	17	

On souhaite établir un plan de production de façon à maximiser le chiffre d'affaires.

5.2. Formulation mathématique

La forme standard, exigée par l'algorithme du simplexe, ne correspond pas en général à l'écriture spontanée des modèles économiques où les contraintes ont le plus souvent la forme d'inégalités. C'est pourquoi la forme la plus naturelle est plutôt la forme standard.

Appelant x_1; x_2; x_3; x_4 les quantités respectives de produits 1, 2, 3, 4, le problème admet la modélisation suivante :

$$\text{Max } z = 7x_1 + 9x_2 + 18x_3 + 17x_4$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 &\leqslant 42 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &\leqslant 17 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 &\leqslant 24 \\ x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 \ , \ x_4 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Afin de ramener le programme sous forme standard, on introduit trois variables d'écart x_5, x_6 et x_7, qui mesurent pour chaque ressource l'écart entre la quantité initialement disponible et la quantité consommée par le plan de fabrication donné par les variables de décision x_1, x_2, x_3 et x_4. On obtient :

$$\text{Max } z = 7x_1 + 9x_2 + 18x_3 + 17x_4$$

$$\begin{array}{rl} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 + x_5 & = 42 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_6 & = 17 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_7 & = 24 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \geqslant 0 \end{array}$$

5.3. Dictionnaire initial

La formulation standard précédente nous permet d'exprimer facilement les variables d'écart comme fonctions affines des variables de décision :

$$\begin{array}{|ccccccccccc|} x_5 & = & 42 & - & 2x_1 & - & 4x_2 & - & 5x_3 & - & 7x_4 \\ x_6 & = & 17 & - & x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & - & 2x_4 \\ x_7 & = & 24 & - & x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & - & 3x_4 \\ \hline z & = & & & 7x_1 & + & 9x_2 & - & 18x_3 & + & 17x_4 \\ \hline \end{array} \qquad \text{(Dic 1)}$$

Les variables x_5, x_6, x_7 sont des variables de base et x_1, x_2, x_3, x_4 sont des variables hors-base.

5.4. Première itération

D'après les critères d'entrée et de sortie en base,

— La variable x_3 entre en base car elle a le plus grand coefficient positif dans la dernière ligne du dictionnaire (Dic 1), qui est 18.

— La variable x_7 sort de la base car elle correspond au plus petit rapport parmi les rapports suivants :

$$\frac{42}{5} = 8.4, \quad \frac{17}{3} = 8.5, \quad \frac{24}{3} = 8.$$

Nous allons faire un changement de dictionnaire en échangeant les rôles de x_3 et x_7. On utilise la troisième équation du (Dic 1) pour exprimer x_3 en fonction de x_1, x_2, x_4 et x_7 :

$$x_3 = 8 - \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_7 - x_4$$

Reportons ensuite la valeur de x_3 dans les autres équations du dictionnaire :

$$\begin{array}{|lclclclclcl|}
x_5 & = & 2 & - & \frac{1}{3}x_1 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{5}{3}x_7 & - & 2x_4 \\
x_6 & = & 1 & - & \frac{1}{3}x_1 & + & \frac{1}{3}x_2 & + & \frac{2}{3}x_7 & & \\
x_3 & = & 8 & - & \frac{1}{3}x_1 & - & \frac{2}{3}x_2 & - & \frac{1}{3}x_7 & - & x_4 \\
\hline
z & = & 144 & + & x_1 & - & 3x_2 & - & 6x_7 & - & x_4 \\
\hline
\end{array} \qquad \text{(Dic 2)}$$

Puisqu'il y a encore un coefficient positif dans la nouvelle expression de z (celui de x_1), nous ne sommes pas à la solution optimale.

5.5. Deuxième itération

Par un raisonnement analogue à celui de la première itération, nous déduisons que :

- La variable x_1 entre en base
- La variable x_6 sort de la base.

Construisons le nouveau dictionnaire :

$$\begin{array}{|lclclclclcl|}
x_5 & = & 1 & + & x_6 & - & x_2 & + & x_7 & - & 2x_4 \\
x_1 & = & 3 & - & 3x_6 & + & x_2 & + & 2x_7 & & \\
x_3 & = & 7 & + & x_6 & - & x_2 & - & x_7 & - & x_4 \\
\hline
z & = & 147 & - & 3x_6 & - & 2x_2 & - & 4x_7 & - & x_4 \\
\hline
\end{array} \qquad \text{(Dic 3)}$$

Puisque tous les coefficients de la fonction objectif z sont négatifs, il n'est plus possible d'améliorer z. La solution obtenue

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 7, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 1, \quad x_6 = x_7 = 0$$

est optimale, et la valeur maximum de z est 147.

4 Algorithme du simplexe

Méthode des tableaux

La méthode algébrique, de résolution des programmes linéaires, devient compliquée et nécessite une très grande attention dès que le nombre des variables et de contraintes est important.

Il est possible d'adopter une représentation sous forme de tableaux qui facilite considérablement les calculs. On effectue généralement les calculs sur le tableau des coefficients qui porte le nom de tableau Simplexe. Mais il faut bien garder à l'esprit que ce tableau et les opérations que l'on va y effectuer ne sont qu'une traduction des opérations sur le système d'équations algébriques correspondantes.

1. Recherche d'un sommet de départ

1.1. Forme simpliciale

1.2. Phase I du simplexe

2. Illustration de l'algorithme

Nous décrirons le déroulement de la méthode du simplexe en l'appliquant au modèle de fabrication des chassis (FC) introduit au chapitre 2. Reprenons la formulation du programme (FC) dans laquelle les variables d'écart étaient incluses

$$\text{(FC)} \quad \begin{cases} \text{Max } z = 300x_1 + 500x_2 \\ \begin{array}{rrrrrl} x_1 & & +x_3 & & & = 4 \\ & 2x_2 & & +x_4 & & = 12 \\ 3x_1 + & 2x_2 & & & +x_5 & = 18 \\ x_1 \;, & x_2 & ,x_2 & ,x_4 & ,x_5 & \geqslant 0 \end{array} \end{cases}$$

On exprime le problème sous forme matricielle, où :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 300 & 500 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous allons maintenant voir commet effectuer les procédures de l'algorithme du simplexe en utilisant les tableaux.

2.1. Tableau initial

On construit un tableau initial du simplexe, qui se compose du vecteur $\boldsymbol{b}$, de la matrice $\mathbf{A}$, et d'une ligne $[0, \boldsymbol{c}]$ situés sous les précédents où 0 correspond à la valeur de z à l'origine (lorsque $x_1 = x_2 = 0$) :

B	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	4	1	0	1	0	0
x_4	12	0	2	0	1	0
x_5	18	3	2	0	0	1
z	0	300	500	0	0	0

vecteur $\boldsymbol{b}$

variables de base **B**

matrice **A**

valeur de z

vecteur $\boldsymbol{c}$

On a ajouté au-dessus du tableau le nom des variables pour voir à quelle variable correspond chaque colonne du tableau.
Plusieurs caractéristiques d'un tableau simplex sont à remarquer

— Tout d'abord, on peut lire directement sur le tableau les valeurs des variables de base. Si $x_1 = x_2 = 0$, on obtient $x_3 = 4$, $x_4 = 12$ et $x_5 = 18$. Soit $\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{b}$.

— Dans la dernière ligne, on trouve un coefficient égal à 0 pour chaque variable de base (la fonction z est exprimée en fonction des seuls variables hors base).

— La matrice carrée correspondant aux variables de base est la matrice identité.

— Enfin, le premier coefficient de la dernière ligne donne l'opposé de la valeur de z

2.2. Pivot et changement de base

Pour augmenter la valeur de z, on examine une nouvelle solution de base. Pour l'obtenir, on doit introduire une nouvelle variable dans la base et exclure une des variables qui y figurait précédemment. On appelle **changent de base** le processus qui consiste à choisir la variable entrante et la variable sortante.

Choix de la variable entrante

Dans la dernière ligne, le coefficient dont la valeur est la plus élevée détermine la variable à entrer dans la base. Donc la variable entrante est x_2. On indique ceci dans le tableau en colorant la colonne de la variable entrante que l'on appelle la **colonne pivot**.

variable entrante

B	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	4	1	0	1	0	0
x_4	12	0	2	0	1	0
x_5	18	3	2	0	0	1
z	0	300	500	0	0	0

colonne pivot

Choix de la variable sortante

On choisit la variable sortante comme étant la variable de base qui s'annule la première. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, cela revient à calculer le minimum du rapport du coefficient du membre de droite de chaque contrainte sur le coefficient correspondant de la colonne pivot lorsque ce dernier est *strictement positif* :

$$\min\left\{\frac{12}{2}, \frac{18}{2}\right\} = 6$$

Dans le cas où le coefficient dans la colonne entrante est négatif ou nul, la ligne n'entre pas en compte dans le calcul du minimum. Illustrons ceci sur un exemple. Supposons que le coefficient de x_2 dans la première contrainte soit -1 à la place de 0. L'équation correspondante se récrit de manière équivalente comme suit :

$$x1 = 4 + x2$$

Quelle que soit la valeur de $x_2 \geqslant 0$, la variable de base x_1 reste positive.

La variable sortante est alors la variable de base dont la valeur se lit dans la ligne où le minimum se produit : ici, il s'agit de la deuxième ligne et donc de la variable x_4. On encadre alors la ligne où le minimum se produit. Cette ligne reçoit le nom de **ligne pivot** :

variable entrante

B	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	4	1	0	1	0	0
x_4	12	0	2	0	1	0
x_5	18	3	2	0	0	1
z	0	300	500	0	0	0

$\frac{\boldsymbol{b}}{x_2}$
6
9

variable sortante

nombre pivot

colonne pivot

ligne pivot

Le seul intérêt de cette colonne est d'aider au choix de la variable sortante ; elle ne fait pas partie du tableau du simplexe.

On appelle **nombre pivot** ou **pivot** le coefficient situé à l'intersection de la colonne pivot et de la ligne pivot. C'est donc le centre de la croix ainsi formée par la ligne et la colonne pivot.

2.3. Pivotage et tableaux simplexe

Le pivotage est le processus qui consiste à amener la colonne de la variable sortante en lieu et place de la variable entrante. Le pivot nous permettra de transformer le tableau actuel en un deuxième tableau correspondant à la nouvelle base. Ceci peut être fait par trois types d'opérations :

1. **Transformation de la ligne pivot :** pour obtenir la ligne du pivot transformée, il suffit de diviser *tous* ses éléments par le pivot.
2. **Transformation de la colonne pivot :** après avoir ramené par division le pivot à 1, toutes les éléments situé au-dessus et au-dessous du pivot deviennent zéro.

B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	4	1	0	1	0	0
x_4	6	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0
x_5	18	3	2	0	0	1
z	0	300	500	0	0	0

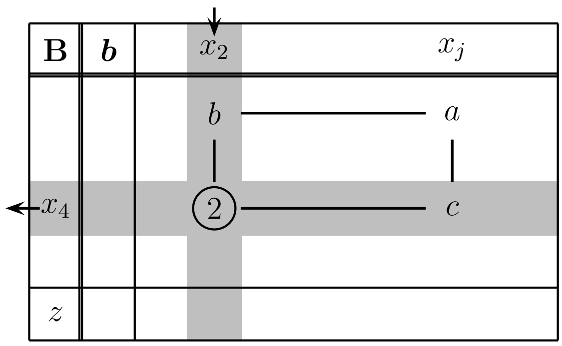
B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	4	1	0	1	0	0
x_2	6	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0
x_5	18	3	0	0	0	1
z	0	300	0	0	0	0

3. **Transformation des autres cases du tableau :** pour obtenir la transformée des autres nombres, il suffit d'appliquer la règle dite du **rectangle** :

$$a' = a - \frac{b \times c}{2}$$

- a' est la valeur modifiée du coefficient a qui est considéré
- b est l'élément situé sur la même ligne que a, mais dans la colonne du pivot
- c est l'élément situé dans la même colonne que a, mais sur la ligne du pivot

Dans le tableau à modifier, le pivot et les coefficient a, b et c forment les coins d'un rectangle. D'où le nom de la méthode.



Remarquons que la règle du rectangle implique :

- si une ligne contient un 0 à l'intersection avec la colonne du pivot, cette ligne ne sera pas modifiée.
- si une colonne contient un 0 à l'intersection avec la ligne du pivot, cette colonne ne sera pas modifiée.

En appliquant ces opérations au tableau initial, on obtient le deuxième tableau :

B	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	4	1	0	1	0	0
x_2	6	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0
x_5	6	3	0	0	-1	1
z	-3000	300	0	0	-250	0

On peut lire directement sur ce tableau la deuxième solution de base réalisable. En posant $x_1 = x_4 = 0$, nous conservons une matrice identité qui donne $x_2 = 6$, $x_3 = 4$ et $x_5 = 6$. Le premier coefficient de la dernière ligne (ici, 3000) donne l'opposé de la valeur z dans la deuxième solution de base réalisable :

$$\begin{array}{lcrcl} \text{deuxième solution de base} & : & \boldsymbol{x}^{B_2} & = & (0,6,4,0,6) \\ \text{valeur de la fonction } z \text{ en } \boldsymbol{x}^{B_2} & : & z_2 & = & 3000 \end{array}$$

2.4. Deuxième itération

Le maximum de la fonction z est atteint lorsqu'il n'y a plus de coefficients positifs dans la dernière ligne. On poursuit les changements de base et les pivotages, conformément aux règles exposées ci-dessus, jusqu'à ce qu'on y parvienne.

- Comme il ne reste plus comme coefficient positif (dans la dernière ligne) que 300, on introduit x_1 dans la base. La colonne de x_1 devient la colonne pivot.
- La division de la colonne des seconds membres par la colonne pivot révèle que le plus faible rapport correspond à la ligne x_5. C'est x_5 qui quitte la base. Alors le nombre 3 devient le nouveau pivot

nouvelle variable entrante

B	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	4	1	0	1	0	0
x_2	6	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0
x_5	6	3	0	0	-1	1
z	-3000	300	0	0	-250	0

nouvelle variable sortante

$\frac{\boldsymbol{b}}{x_1}$
4
2

Le dernier pas de la deuxième itération consiste à déterminer la nouvelle solution de base au moyen du pivotage :

1. **Transformation de la ligne et la colonne pivot :** Divisons la ligne pivot par 3, puis annuler tous les éléments de la colonne pivot sauf le pivot qui est remplacé par 1.

B	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	4	0	0	1	0	0
x_2	6	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0
x_1	2	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
z	-3000	0	0	0	-250	0

2. **Transformation des autres cases du tableau :** Nous utilisons la règle du rectangle pour transformer le reste des coefficients. Le résultats est le suivant :

B	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	2	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_2	6	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0
x_1	2	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
z	-3600	0	0	0	-150	-100

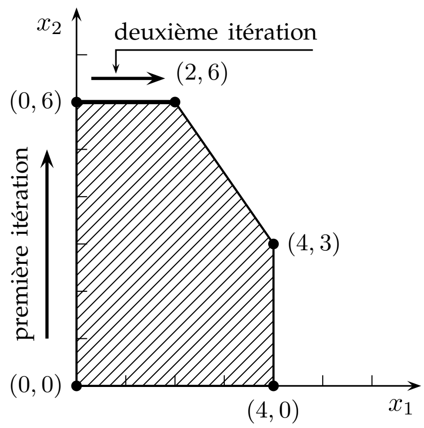
On peut lire directement sur ce tableau la troisième solution de base réalisable et la valeur de la fonction objectif z dans cette solution :

$$\begin{array}{lcccl} \text{troisième solution de base} & : & \boldsymbol{x}^{B_3} & = & (2,6,2,0,0) \\ \text{valeur de la fonction } z \text{ en } \boldsymbol{x}^{B_3} & : & z_3 & = & 3600 \end{array}$$

Comme il n'y a plus de coefficients positifs sur la dernière ligne, la solution courante est **optimale**. Ainsi :

$$(x_1^*, x_2^*) = (2,6) \quad \text{et} \quad z^* = 3600$$

Le chemin suivi par la méthode des tableaux est illustré par la figure suivante.



le chemin suivi par l'algorithme du simplexe

C'est le même chemin suivi par la méthode algébrique. Ce qui n'est pas étonnant.

3. Algorithme du simplexe en tableaux

L'algorithme du simplexe comporte 4 étapes dont les 3 dernières sont répétées à chaque itération. La méthode des tableaux du simplexe permet d'appliquer toutes les étapes de l'algorithme du simplexe sous forme d'une sequence de tableaux représentés par la figure suivant :

B	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\cdots$	x_{n+m}
x_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	1	0	$\cdots$	0
x_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	0	1	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	0
x_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	0	0	$\cdots$	1
z	$-z^B$	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	0	0	$\cdots$	0

Étape 1 :

Dans le cas où toutes les contraintes initiales d'un programme linéaire se présentent sous forme de contraintes d'inégalités du type "inférieur ou égal" avec un membre de droite positif, on réécrit d'abord le programme sous forme standard en ajoutant des variables d'écart. Puis on met les variables de décisions (variables originales) hors base et les variables d'écart en base. On indique en section 5 comment construire le tableau initial dans le cas d'un programme linéaire quelconque.

Étape 2 :

Si les coefficients c_j sont tous $\leqslant 0$, alors STOP : la solution de la base actuelle est optimale. Sinon, choisir la variable hors base dont le coefficient dans la dernière ligne est positif et le plus grand possible. Soit x_r la variable entrante.

$$\text{Soit } x_r \text{ telle que } \mathrm{c}_r \geqslant \mathrm{c}_j, \text{ pour tout } \mathrm{c}_j \geqslant 0$$

On colore la colonne correspondante qui est appelée colonne pivot. Il en résulte le tableau suivant :

B	***b***	x_1	$\cdots$	x_r	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\cdots$	x_{n+m}
x_{n+1}	b_1	a_{11}	$\cdots$	a_{1r}	$\cdots$	a_{1n}	1	0	$\cdots$	0
x_{n+2}	b_2	a_{21}	$\cdots$	a_{2r}	$\cdots$	a_{2n}	0	1	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	0
x_{n+m}	b_m	a_{m1}	$\cdots$	a_{mr}	$\cdots$	a_{mn}	0	0	$\cdots$	1
z	$-z^B$	c_1	$\cdots$	c_r	$\cdots$	c_n	0	0	$\cdots$	0

Étape 3 :

Choisir comme variable sortante la première variable de base à s'annuler. Pour cela, on calcule le minimum du rapport du second membre b_i sur le coefficient a_{ir} de la variable entrante dans la même ligne lorsque $\mathrm{a}_{ir} > 0$. Soit ℓ la ligne où le minimum se produit :

$$\frac{\mathrm{b}_\ell}{\mathrm{a}_{\ell r}} = \min\left\{\frac{\mathrm{b}_i}{\mathrm{a}_{ir}} \;:\; \mathrm{a}_{ir} > 0\right\}$$

La variable sortante est celle qui correspond à la ligne où le minimum se produit. Soit x_s la variable sortante. On colore la ligne correspondante qui est appelée ligne pivot. Il en résulte le tableau suivant :

B	$\boldsymbol{b}$	x_1	$\cdots$	x_r	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\cdots$	x_{n+m}
x_{n+1}	b_1	a_{11}	$\cdots$	a_{1r}	$\cdots$	a_{1n}	1	0	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	0
x_s	b_s	a_{s1}	$\cdots$	a_{sr}	$\cdots$	a_{sn}	0	1	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	0
x_{n+m}	b_m	a_{m1}	$\cdots$	a_{mr}	$\cdots$	a_{mn}	0	0	$\cdots$	1
z	$-z^B$	c_1	$\cdots$	c_r	$\cdots$	c_n	0	0	$\cdots$	0

Le pivot est le nombre qui se trouve à l'intersection de la colonne pivot et la ligne pivot. Dans la section gauche du nouveau tableau, on remplace la variable sortante x_s par la variable entrante x_r.

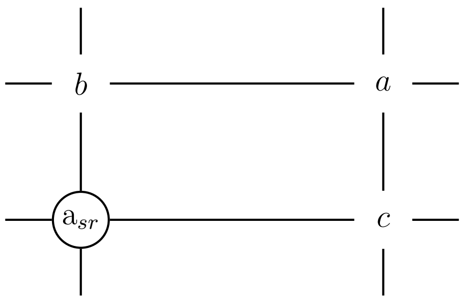
Étape 4 :

Cette étape permet de construire un nouveau tableau de simplexe à partir du tableau précédent. Elle comprend trois opérations :

— **Ligne de pivot :** pour obtenir la ligne du pivot transformée, il suffit de diviser tous ses éléments par le pivot.

— **Colonne de pivot :** pour obtenir la colonne du pivot transformée, il suffit de remplacer tous ses éléments par 0 sauf la place du pivot.

— **Ailleurs :** pour obtenir la transformée des autres nombres, il suffit d'appliquer la règle du rectangle :



si a est l'élément de l'ancien tableau (b_i, a_{ij} $(i \neq s,\ j \neq r)$, $-z^B$, c_j) dont on cherche la transformée a', a_{sr} est le pivot et b, d les éléments permettant de construire un rectangle à partir de a et a_{sr},

alors a', la transformée de a, s'obtient en retranchant à a le produit $b \times c$ divisé par le pivot a_{sr} :

$$a' = a - \frac{b \times c}{\mathrm{a}_{sr}}$$

Remarquons que toute ligne possédant un zéro dans la colonne du pivot reste inchangée ; de même, toute colonne possédant un zéro dans la ligne du pivot reste inchangée.

4. Application

Reprenons la forme standard du problème qui a servi d'application au chapitre précédent :

$$\text{Max } z = 7x_1 + 9x_2 + 18x_3 + 17x_4$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 + x_5 \quad &= 42 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \quad + x_6 \quad &= 17 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \quad + x_7 &= 24 \\ x_i \geqslant 0 \quad i = 1, \ldots, 7 & \end{aligned}$$

Tableau initial :

Il est évident que

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, \quad x_5 = 42, \quad x_6 = 17, \quad x_7 = 24$$

est une solution de base réalisable. Construisons le premier tableau simplexe :

B	***b***	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	42	2	4	5	7	1	0	0
x_6	17	1	1	2	2	0	1	0
x_7	24	1	2	3	3	0	0	1
z	0	7	9	18	17	0	0	0

Comme, dans la dernière ligne, il y a des coefficients des variables hors base qui sont positifs (valeurs 7, 9, 17 et 18), cette solution de base réalisable n'est pas optimale.

Deuxième tableau :

D'après les critères d'entrée et de sortie présentés à la section 4 :

— x_3 hors base **entre** en base. Car elle possède le plus grand coefficient positif, dans la dernière ligne, qui est 18.

— x_7 en base **sort** de base, puisque c'est elle qui correspond à la ligne pour laquelle le rapport de b_i sur a_{ir} est le plus petit avec $a_{ir} > 0, \quad i = 1, 2, 3; \; r = 3$. En effet, a_{13}, a_{23}, a_{23} sont positifs et

$$\frac{b_1}{a_{13}} = \frac{42}{5} = 8.4, \quad \frac{b_2}{a_{23}} = \frac{17}{2} = 8.5, \quad \frac{b_3}{a_{33}} = \frac{24}{3} = 8,$$

le plus faible ration est $\frac{24}{3}$ correspond à la ligne d'indice 3.

ce que nous indiquons dans le tableau initial en colorant la colonne pivot et la ligne pivot ; nous y entourons aussi le pivot, qui est égal à 3.

Construisons le nouveau tableau simplexe en appliquant les règles du pivotage :

B	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	2	1	0	$-\frac{5}{3}$
x_6	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	1	$-\frac{2}{3}$
x_3	8	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	1	0	0	$\frac{1}{3}$
z	–144	1	–3	0	–1	0	0	–6

Puisqu'il y a encore, dans la dernière ligne, un coefficient positif (valant 1), nous ne sommes pas à la solution optimale et nous devons donc rechercher une nouvelle meilleure solution de base réalisable.

Troisième tableau :

Par un raisonnement analogue à celui de l'étape (2), nous déduisons que :

- x_1 hors base **entre** en base.
- x_6 en base **sort** de base

ce que nous indiquons dans le tableau précédent.

Construisons le nouveau tableau simplexe :

B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	1	0	1	0	2	1	–1	–1
x_1	3	1	–1	0	0	0	3	–2
x_3	7	0	1	1	1	0	–1	1
z	–147	0	–2	0	–1	0	–3	–4

Puisque tous les coefficients de la dernière ligne sont négatifs, le tableau trouvé correspond à une solution optimale. Celle-ci est définie par :

$$x_1 = 3, \;\; x_3 = 7, \;\; x_5 = 1, \;\; x_2 = x_4 = x_6 = x_7 = 0.$$

Le profit maximal est $z = 147$.

5 Dualité en programmation linéaire

La dualité est une notion essentielle en programmation linéaire. A un programme linéaire donné que nous appelons **primal**, l'opération de dualité associe un autre programme linéaire dit son **dual**, qui ne sera défini qu'à l'aide des seules données du primal. La dualité présente un double intérêt :

— d'une part, le programme dual à une interprétation économique importante : il constitue une autre vision du programme initial, le primal. En particulier, la dualité permet de montrer qu'un problème d'allocation optimale des ressources rares est aussi un problème de tarification optimale de ces ressources ;

— d'autre part, les propriétés liant le programme primal et son dual permettront de résoudre des problèmes de minimisation en termes de maximisation, ce qui est souvent plus facile, et de développer de nouveaux algorithmes qui se révéleront plus performants dans un grand nombre de situations.

1. La construction du modèle dual

Avant de donner la definition formelle d'un problème dual, nous allons expliquer comment il s'explique en terme de problème de production.

1.1. Exemple 1

Reprenons le modèle de l'entreprise Remox décrit au chapitre 3, que nous dénoterons (P) :

$$
(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} \text{Max } z = 7x_1 + 9x_2 + 18x_3 + 17x_4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 \leqslant 42 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leqslant 17 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leqslant 24 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geqslant 0 \end{cases}
$$

Brahim, propriétaire d'une entreprise concurrente de la même ville, se propose de racheter les ressources de l'entreprise Remox. Brahim connaît bien les paramètres du modèle (P), qu'il sait formuler mais sans savoir le résoudre. Il offre à Ahmed de lui racheter les ressources de l'entreprise Remox à des prix unitaires qu'il reste à fixer. Ahmed se montre intéressé, à condition d'y trouver son compte.

Les prix u_1 dh, u_2 dh et u_3 dh sont les mondants unitaires que Brahim proposera à Ahmed pour s'approprier chaque unite des ressources A, B et C respectivement. Brahim ne jette pas son argent par les fenêtres. Comme il veut débourser le moins possible pour l'achat de la totalité des trois ressources de l'entreprise Remox, il cherche à minimiser :

$$w = 42u_1 + 17u_2 + 24u_3$$

tout en proposant à Ahmed une offre équitable.

Quand Ahmed vend une unité du Produit 1, il empoche 7 dh. Mais pour vendre une unité du Produit 1, il lui faut consacrer à sa production 2 unités de la ressource A, 1 unité de la ressource B et 1 unité de la ressource C. Brahim estime qu'Ahmed n'acceptera pas de céder ce paquet de ressources pour moins de 7 dh. Brahim devra donc fixer les prix offerts pour les ressources d'Ahmed de façon à ce que

$$2\,u_1 + 1\,u_2 + 1\,u_3 \geqslant 7 \qquad \text{(Produit 1)}$$

Une démarche simillaire à propos des autres produits l'amène à écrire que

$$\begin{aligned} 4\,u_1 + 1\,u_2 + 2\,u_3 &\geqslant 9 && \text{(Produit 2)}\\ 5\,u_1 + 2\,u_2 + 3\,u_3 &\geqslant 18 && \text{(Produit 3)}\\ 7\,u_1 + 1\,u_2 + 3\,u_3 &\geqslant 17 && \text{(Produit 4)} \end{aligned}$$

Et il est raisonnable de penser que

$$u_1,\ u_2,\ u_3 \geqslant 0$$

Finalement, pour déterminer les prix unitaires minimaux qu'il proposera à Ahmed, Brahim devrait résoudre le programme linéaire suivant :

$$\text{(D)} \quad \begin{cases} \text{Min } w = 42u_1 + 17u_2 + 24u_3 \\ \qquad 2u_1 + u_2 + u_3 \geqslant 7 \\ \qquad 4u_1 + u_2 + 2u_3 \geqslant 9 \\ \qquad 5u_1 + 2u_2 + 3u_3 \geqslant 18 \\ \qquad 7u_1 + 2u_2 + 3u_3 \geqslant 17 \\ \qquad u_1 \ ,\ u_2 \ ,\ u_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Les problèmes (P) et (D) utilisent en fait exactement les mêmes données numériques. On peut les lire directement à partir du tableau ci-dessous ; (P) correspond à une lecture ligne par ligne, (D) à une lecture colonne par colonne.

<table>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="6">Primal (Max)</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="4">Coeff. des x_i</td><td></td><td>S.M</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>x_3</td><td>x_4</td><td></td><td>b</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">Dual (Min)</td><td rowspan="3">Coeff. des u_j</td><td>u_1</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>7</td><td>$\leqslant$</td><td>42</td><td rowspan="3">Coeff. dans w</td></tr>
<tr><td>u_2</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>$\leqslant$</td><td>17</td></tr>
<tr><td>u_3</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>$\leqslant$</td><td>24</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>$\geqslant$</td><td>$\geqslant$</td><td>$\geqslant$</td><td>$\geqslant$</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>S.M.</td><td>c</td><td>7</td><td>9</td><td>18</td><td>17</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="4">Coeff. dans z</td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

1.2. Exemple 2

Un pharmacien doit préparer une poudre vitaminée contenant au moins 25 unités de vitamine A, 60 unités de vitamine B et 15 unités de vitamine C. Il s'approvisionne auprès un laboratoire qui vend deux types de poudre vitaminée en sachet :

— au prix de 60 dh une poudre X contenant 20 unités de vitamine A, 30 unités de vitamine B et 5 unités de vitamine C ;

— au prix de 90 dh une poudre Y contenant 5 unités de vitamine A, 20 unités de vitamine B et 10 unités de vitamine C ;

Combien doit-il se procurer de poudre X et de poudre Y pour assurer, au coût minimum, son nouveau poudre ? Le problème du pharmacien se formule :

$$(\mathrm{D}) \quad \begin{cases} \text{Min } z = 60x_1 + 90x_2 \\ \qquad 20x_1 + 5x_2 \geqslant 25 \\ \qquad 30x_1 + 20x_2 \geqslant 60 \\ \qquad 5x_1 + 10x_2 \geqslant 15 \\ \qquad x_1 \;,\; x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

où x_1 et x_2 les nombres de poudres de types X et Y qui'il doit mélanger.

Le laboratoire décide de vendre séparément les vitamines A, B et C en sachet de 25, 60 et 15 unités. Combien doit-il vendre l'unité de chaque vitamine pour être compétitif avec le pharmacien ?

Soient u_1, u_2 et u_3 les prix unitaires respectifs des vitamines A, B et C. Le laboratoire cherche donc à maximiser son chiffres d'affaires :

$$w = 25u_1 + 60u_2 + 15u_3$$

Le laboratoire doit fixer les prix offerts pour les vitamines de façon à ce que :

— un mélange équivalent à la poudre X ne coûte pas plus cher que la poudre X ;

— un mélange équivalent à la poudre Y ne coûte pas plus cher que la poudre Y.

Ce qu'on peut écrire :

$$\begin{aligned} 20u_1 + 30u_2 + \ \ 5u_3 &\leqslant 60 \\ 5u_1 + 20u_2 + 10u_3 &\leqslant 90 \end{aligned}$$

Et il est raisonnable de penser que

$$u_1,\ u_2 \geqslant 0$$

Finalement, pour déterminer les prix unitaires maximaux qu'il ne doit pas dépasser pour rester compétitif, le laboratoire devrait résoudre le programme linéaire suivant :

$$(\mathrm{D}) \quad \begin{cases} \text{Max } w = 20u_1 + 60u_2 + 15u_3 \\ \qquad 20u_1 + 30u_2 + \ \ 5u_3 \leqslant 60 \\ \qquad\ 5u_1 + 20u_2 + 10u_3 \leqslant 90 \\ \qquad\quad u_1 \ , \quad u_2 \ , \quad u_3 \geqslant \ 0 \end{cases}$$

1.3. Définition du problème dual

La dualité associe à tout problème linéaire un autre problème linéaire qui est appelé problème dual du problème initial ; par opposition le problème initial est appelé problème primal. Considérons un problème de maximisation sous canonique :

$$(\mathrm{D}) \quad \begin{cases} \text{Max } \ z \ = \ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \qquad\qquad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ \leqslant \ b_i & i = 1, \ldots, m \\ \qquad\qquad\qquad x_j \ \geqslant \ 0 & j = 1, \ldots, n \end{cases}$$

Le problème dual est le suivant :

$$
\text{(D)} \quad \begin{cases} \text{Min } w = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} b_i u_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \geqslant c_j & j = 1, \dots, n \\ u_i \geqslant 0 & i = 1, \dots, m \end{cases}
$$

Les variables x_j sont appelées variables primales et les variables u_i sont appelées variables duales.

Cette définition est caractérisée par les règles suivantes :

— le sens de l'optimisation est inversé. La maximisation (resp. minimisation) dans le primal devient une minimisation (resp. maximisation) dans le dual ;

— les signes sont inversés dans les inégalités correspondant aux contraintes, mais la contrainte de non-négativité sur les variables de décision subsiste ;

— les coefficients de la fonction économique du primal deviennent les seconds membres des contraintes duales ; les seconds membres des contraintes primales deviennent les coefficients de la fonction économique du dual ;

Comme le problème dual du dual est le problème primal initial, il convient donc de parler d'une paire de problèmes de programmation linéaire liés par la dualité.

Souvent le problème primal est considérée soit sous sa forme canonique ou sous sa forme standard. Dans ces deux, le problème dual devient, en notation vectorielle,

— la forme canonique :

$$
\text{le primal :} \quad \begin{cases} \text{Max } z = \boldsymbol{cx} \\ \mathbf{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0} \end{cases} \qquad \text{le dual :} \quad \begin{cases} \text{Min } w = \boldsymbol{ub} \\ \boldsymbol{u}\mathbf{A} \geqslant \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{u} \geqslant \mathbf{0} \end{cases}
$$

— la forme standard :

$$
\text{le primal :} \quad \begin{cases} \text{Max } z = \boldsymbol{cx} \\ \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0} \end{cases} \qquad \text{le dual :} \quad \begin{cases} \text{Min } w = \boldsymbol{ub} \\ \boldsymbol{u}\mathbf{A} \geqslant \boldsymbol{c} \end{cases}
$$

Nous pouvons vérifier cette dernière relation, en mettant la forme standard sous une forme canonique équivalente.

Exemple

Considérons le problème suivant :

$$
(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} \text{Max } z = x_1 + 3x_2 \\ x_1 + x_2 \leqslant 14 \\ -2x_1 + 3x_2 \leqslant 12 \\ 2x_1 - x_2 \leqslant 12 \\ x_1 \ , \ x_2 \geqslant 0 \end{cases}
$$

son dual s'écrit

$$
(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} \text{Min } w = 14u_1 + 12u_2 + 12u_3 \\ u_1 - 2u_2 + 2u_3 \leqslant 1 \\ u_1 + 3u_2 - u_3 \leqslant 3 \\ u_1 \ , \ u_2 \ , \ u_3 \geqslant 0 \end{cases}
$$

1.4. Règles de dualisation

Le tableau suivant donne un ensemble de règles formelles permettant de passer d'un problème de programmation linéaire général à son problème dual. Nous laissons le soin au lecteur, à titre d'exercice de vérifier la cohérence de ces règles avec les définitions de la section précédente.

Max z	$\Longleftrightarrow$	Min w
variable $x_j \geqslant 0$	$\Longleftrightarrow$	contrainte j est une inégalité "$\geqslant$"
variable $x_j \leqslant 0$	$\Longleftrightarrow$	contrainte j est une inégalité "$\leqslant$"
variable x_j sans signe	$\Longleftrightarrow$	contrainte j est une égalité "="
contrainte i est une inégalité "$\leqslant$"	$\Longleftrightarrow$	variable $u_i \geqslant 0$
contrainte i est une inégalité "$\geqslant$"	$\Longleftrightarrow$	variable $u_i \leqslant 0$
contrainte i est une égalité "="	$\Longleftrightarrow$	variable u_i sans signe

2. Propriétés de la dualité

Nous allons montrer que la relation entre deux problèmes va beaucoup plus loin que l'esthétique mathématique de cette symétrie. En fait nous allons étudier certaines résultats concernant les relations entre le problème primal et son dual.

Considérons un problème linéaire de maximisation (le primal) sous sa forme canonique et son dual

$$\begin{cases} \tilde{z} = \text{Max} \ \ z = \boldsymbol{cx} \\ \qquad\qquad \mathrm{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b} \\ \qquad\qquad \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \tilde{w} = \text{Min} \ \ w = \boldsymbol{ub} \\ \qquad\qquad \boldsymbol{u}\mathrm{A} \geqslant \boldsymbol{c} \\ \qquad\qquad \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

2.1. Dualité faible

Propriété 1

Si $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{u}$ sont des solutions réalisables respectivement du primal (maximum) et du dual (minimum), elles vérifient :

$$\boldsymbol{cx} \leqslant \boldsymbol{ub}$$

En effet,

$$\left.\begin{array}{lll} \mathrm{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b} & \text{et} & \boldsymbol{u} \geqslant 0 \\ \boldsymbol{u}\mathrm{A} \geqslant \boldsymbol{c} & \text{et} & \boldsymbol{x} \geqslant 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \boldsymbol{u}\mathrm{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{ub} \\ \boldsymbol{u}\mathrm{A}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{cx} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boldsymbol{cx} \leqslant \boldsymbol{u}\mathrm{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{ub}$$

Corollaire 1

Une solution réalisable du dual (resp. primal) fournit une borne supérieur (resp. inférieur) de $\tilde{z}$ (resp. $\tilde{w}$) :

$$\begin{array}{lll} \tilde{z} & \leqslant & \boldsymbol{ub} \quad \forall\, \boldsymbol{u} \text{ réalisable du dual} \\ \tilde{w} & \geqslant & \boldsymbol{cx} \quad \forall\, \boldsymbol{u} \text{ réalisable du primal} \end{array}$$

Corollaire 2

Soient $\overline{\boldsymbol{x}}$ et $\overline{\boldsymbol{u}}$ des solutions réalisables respectivement du primal et du dual. Si $\boldsymbol{c}\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{b}$, alors $\overline{\boldsymbol{x}}$ et $\overline{\boldsymbol{u}}$ sont solutions optimales.

En effet, supposons, par exemple, que $\overline{\boldsymbol{x}}$ n'est pas une solution optimale. Alors, il existe une solution réalisable $\boldsymbol{x}^*$ tel que

$$\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x}^* > \boldsymbol{c}\,\overline{\boldsymbol{x}}$$

D'où $\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x}^* > \overline{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{b}$, ce qui est en contradiction avec la propriété 1.

Le corollaire 2 indique que l'égalité des fonctions économiques du primal et du dual est une condition **suffisante** d'optimalité pour des solutions réalisables des deux problèmes.

Corollaire 3

Si un problème possède une valeur optimale infinie, son dual est impossible.

En effet, si $\tilde{z} = +\infty$., D'après le corollaire 1, toute solution réalisable $\overline{\boldsymbol{u}}$ du dual devrait vérifier $+\infty \leqslant \overline{\boldsymbol{u}}\, \boldsymbol{b}$. Ce qui est impossible. Même démarche si $\tilde{w} = -\infty$.

2.2. Dualité forte

Propriété 2

Si le problème primal (resp. dual) possède une solution optimale finie, alors il en est de même pour le problème dual (resp. primal) et de plus $\tilde{z} = \tilde{w}$.

En effet, s'il existe une solution de base optimale finie $\tilde{\boldsymbol{x}}$ du problème primal mis sous forme standard, cette solution est de la forme

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{b} \geqslant \mathbf{0}, \quad \tilde{\boldsymbol{x}}_H = \mathbf{0}$$

avec $\quad \tilde{z} = \boldsymbol{c}_B\tilde{\boldsymbol{x}}_B$ et $\boldsymbol{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \boldsymbol{c} \leqslant \mathbf{0}$ (critère d'optimalité).

Posons

$$\boldsymbol{u}_B = \boldsymbol{c}_B\mathbf{B}^{-1}$$

Cette solution duale est réalisable puisque

$$\boldsymbol{u}_B\mathbf{A} \leqslant \boldsymbol{c}$$

et de plus vérifie

$$\boldsymbol{u}_B\boldsymbol{b} = \tilde{z}$$

Cette solution est donc une solution optimale finie du problème dual.

Corollaire 4

L'égalité des fonctions objectifs du primal et du dual est donc une condition nécessaire et suffisante d'optimalité pour des solutions réalisables des deux problèmes.

Théorème fondamentale de la dualité

Parmi les neuf situations potentielles pour une paire de problèmes liés par la dualité, il n'existe que quatre situations possibles

1. Les deux problèmes ont des solutions optimales finies ;

2. a) Le problème primal a une valeur optimale infinie, et son dual est impossible ;
b) Le problème primal est impossible, et son dual a une valeur optimale infinie ;

3. Les deux problèmes sont impossibles.

Le tableau suivant récapitule la situation

Primal/ Dual	Solution optimale finie	Valeur optimale infinie	Problème impossible
Solution optimale finie	**1.**	Non	Non
Valeur optimale infinie	Non	Non	**2.** a)
Problème impossible	Non	**.2** b)	**3.**

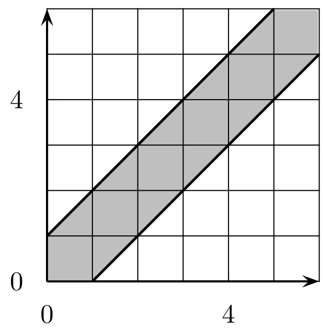
D'après ce qui précède, on obtient le résultat suivant.

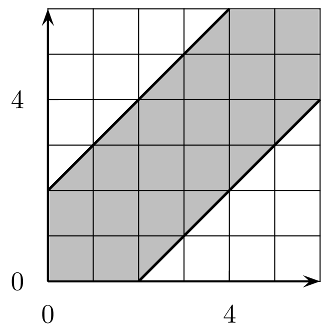
Dans un couple de problèmes liés par la dualité :
— soit les deux problèmes ont des solutions optimales finies ;
— soit un problème est impossible et l'autre a une valeur optimale infinie ;
— soit les deux problèmes sont impossibles.
Toutes les autres situations sont irréalisables.

Illustrations

1. Les deux problèmes ont des solutions optimales finies

$$(P) \begin{cases} \min \ 2x_1 + 2x_2 \\ \quad x_1 - x_2 \geqslant -1 \\ -x_1 + x_2 \geqslant -1 \\ \quad x_1 \ , \ x_2 \geqslant 0 \end{cases} \qquad (D) \begin{cases} \max -u_1 - u_2 \\ \quad u_1 - u_2 \leqslant 2 \\ -u_1 + u_2 \leqslant 2 \\ \quad u_1 \ , u_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

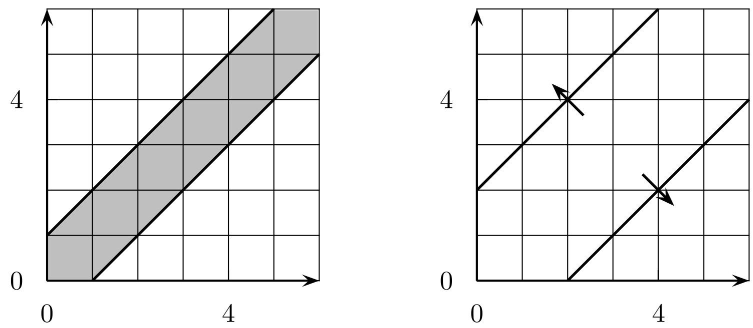




le premier cas du théorème fondamentale de la dualité

2. Un problème est impossible et l'autre a une valeur optimale infinie

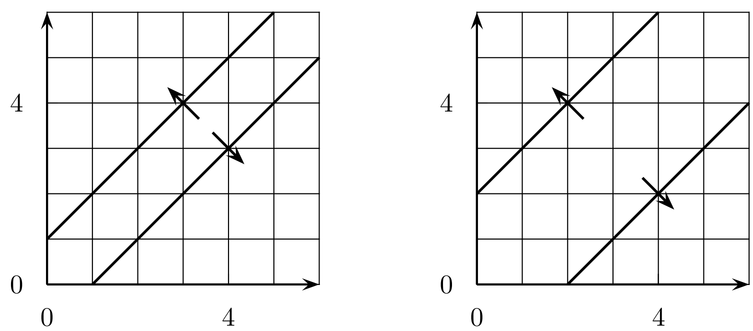
$$(P)\ \begin{cases} \max\ 2x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ x_1 - x_2 \leqslant 1 \\ x_1\ ,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases} \qquad (D)\ \begin{cases} \min\ u_1 + u_2 \\ -u_1 + u_2 \geqslant 2 \\ u_1 - u_2 \geqslant 2 \\ u_1\ ,\ u_2 \geqslant 0 \end{cases}$$



le deuxième cas du théorème fondamentale de la dualité

3. Les deux problèmes sont impossibles

$$(P)\ \begin{cases} \max\ 2x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \leqslant -1 \\ -x_1 + x_2 \leqslant -1 \\ x_1\ ,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases} \qquad (D)\ \begin{cases} \min\ -u_1 - u_2 \\ u_1 - u_2 \geqslant 2 \\ -u_1 + u_2 \geqslant 2 \\ u_1\ ,\ u_2 \geqslant 0 \end{cases}$$



le troisième cas du théorème fondamentale de la dualité

2.3. Théorème des écarts complémentaires

Ce théorème est une autre présentation de la condition nécessaire et suffisante d'optimalité du corollaire 4, et s'endéduit facilement :

> Soient $\overline{\boldsymbol{x}}$ et $\overline{\boldsymbol{u}}$ deux solutions réalisables respectivement du primal et du dual. Une CNS pour que $\overline{\boldsymbol{x}}$ et $\overline{\boldsymbol{u}}$ soient solutions optimales, est qu'elles vérifient les relations :
> $$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{u}}\,(\mathbf{A}\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}) &= 0 \\ (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{u}\mathbf{A})\,\overline{\boldsymbol{x}} &= 0 \end{aligned}$$

Etant donné que par hypothèse,

$$\left.\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{u}}\,(\boldsymbol{b} - \mathbf{A}\overline{\boldsymbol{x}}) = \alpha \geqslant 0 \\ (\overline{\boldsymbol{u}}\mathbf{A} - \boldsymbol{c})\,\overline{\boldsymbol{x}} = \beta \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boldsymbol{c}\overline{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{b} = \alpha + \beta \geqslant 0$$

Une CNS d'optimalité équivalente à $\boldsymbol{c}\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{b}$ est donc

$$\alpha = \beta = 0$$

Appelons

$$(L_i\boldsymbol{x} \leqslant b_i,\ \ u_i \geqslant 0) \quad i = 1, \ldots, m$$

ou

$$(x_j \geqslant 0,\ \ \boldsymbol{u}C_j \geqslant c_j,\ ) \quad j = 1, \ldots, n$$

des couples de contraintes duales.

Convenons qu'une contrainte d'inégalité ($\leqslant$ ou $\geqslant$) est dite serrée pour une solution, si elle est vérifiée avec le signe d'égalité (=) et non serrée dans le cas où elle est vérifiée avec le signe d'inégalité stricte ($<$ ou $>$).
Le théorème des écarts complémentaires peut alors s'énoncer :

> A l'optimum, dans tout couple de contraintes duales, il y a au moins une contrainte serrée.

Ainsi, si $\overline{\boldsymbol{x}}$ et $\overline{\boldsymbol{u}}$ sont des solutions optimales, respectivement du primal et du dual, on en déduit :

- $\overline{x}_j > 0 \longrightarrow \overline{\boldsymbol{u}}C_j = c_j$
- $L_i\overline{\boldsymbol{x}} < b_i \longrightarrow \overline{u}_i = 0$
- $\overline{u}_i > 0 \longrightarrow L_i\overline{\boldsymbol{x}} = b_i$
- $\overline{\boldsymbol{u}}C_j > c_j \longrightarrow \overline{x}_j = 0$

En introduisant les variables d'écart $\boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{v}$ des contraintes réelles du primal et du dual :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{u}\mathbf{A} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

Le théorème des écarts complémentaires s'écrit simplement :

$$\begin{aligned} x_i v_i &= 0 \qquad i = 1, \ldots, n \\ y_j u_j &= 0 \qquad j = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

ce qui justifie l'appellation « écarts complémentaires ».

Exemple :

Appliquons le TEC au problème linéaire suivant :

$$(\mathrm{P}) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} \max\ 15x_1 & + & 25x_2 & & \\ x_1 & + & 3x_2 & \leqslant & 96 \\ x_1 & + & x_2 & \leqslant & 40 \\ 7x_1 & + & 4x_2 & \leqslant & 238 \\ x_1 & , & x_2 & \geqq & 0 \end{array} \right.$$

Son dual est le problème linéaire suivant :

$$(\mathrm{D}) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \min\ 96u_1 & + & 40u_2 & + & 238u_3 & & \\ u_1 & + & u_2 & + & 7u_3 & \geqslant & 15 \\ 3u_1 & + & u_2 & + & 4u_3 & \geqslant & 25 \\ u_1 & , & u_2 & , & u_3 & \geqq & 0 \end{array} \right.$$

Soit la solution primale

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 32$$

- Les deux dernières contraintes ne sont pas saturées
  $\Longrightarrow$ les deux variables duales associées sont nulles ;
- $x_2 > 0 \Longrightarrow 2^{\text{ieme}}$ contrainte duale saturée ;
- Donc $3u_1 = 25 \Longrightarrow u_1 = 25/3$ (et $u_2 = u_3 = 0$) ;
- Cette solution ne satisfait pas la 1^{ere} contrainte duale
  $\Longrightarrow$ non réalisable ! ;
- La solution primale précédente n'est donc pas optimale !

Considérons maintenant la solution primale :

$$x_1 = 12, \quad x_2 = 28$$

- La dernière contrainte n'est pas saturée
  $\Longrightarrow$ la variables duale associée est nulle ;

- $x_1,\ x_2 > 0 \Longrightarrow$ 2 contraintes duales saturées ;
- On obtient donc le système suivant :

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &= 15 \\ 3u_1 + u_2 &= 25 \end{aligned}$$

- On fait la différence des 2 égalités

$$2u_1 = 10 \Longrightarrow u_1 = 5 \Longrightarrow u_2 = 10$$

- Cette solution est admissible pour $(\mathrm{D}) \Longrightarrow x_1 = 12,\ x_2 = 28$ est optimale