
Cours Math310

Deuxième partie : Probabilité

# Chapitre 4: Introduction au calcul des probabilités

M. BEZOUI

31 janvier 2012

# Plan de travail


1. Introduction au calcul des probabilités
2. Terminologie des probabilités
   - Evénement (d'une expèrience aléatoire)
   - Opération sur les évènements
3. Le concept de probabilité
   - Concept de probabilité conditionnelle
4. Quelques propriétés des probabilités conditionnelles
5. Concept dŠindépendance en probabilité
6. Formule de Probabilité totale et théorème de Bayes

# Dans le cours précédent

# Dans le cours précédent

**Arrangement avec Répétition**

Arrangement sans répétition

Permutations

Combinaisons

Triangle de Pascal

Binôme de Newton

# Dans le cours précédent

**Arrangement avec Répétition**
**Arrangement sans répétition**
Permutations
Combinaisons
Triangle de Pascal
Binôme de Newton

# Dans le cours précédent

**Arrangement avec Répétition**
**Arrangement sans répétition**
**Permutations**
Combinaisons
Triangle de Pascal
Binôme de Newton

# Dans le cours précédent

**Arrangement avec Répétition**
**Arrangement sans répétition**
**Permutations**
**Combinaisons**
**Triangle de Pascal**
**Binôme de Newton**

# Dans le cours précédent

- Arrangement avec Répétition
- Arrangement sans répétition
- Permutations
- Combinaisons
- Triangle de Pascal
- Binôme de Newton

# Dans le cours précédent

**Arrangement avec Répétition**
**Arrangement sans répétition**
**Permutations**
**Combinaisons**
**Triangle de Pascal**
**Binôme de Newton**

# Plan de travail

1. Introduction au calcul des probabilités
2. Terminologie des probabilités
   - Evénement (d'une expèrience aléatoire)
   - Opération sur les évènements
3. Le concept de probabilité
   - Concept de probabilité conditionnelle
4. Quelques propriétés des probabilités conditionnelles
5. Concept dŠindépendance en probabilité
6. Formule de Probabilité totale et théorème de Bayes

# Introduction

Cette première notion de la théorie des probabilités s'est imposée au $17^{eme}$ siècle dans l'étude des jeux de hasard (jeux de dés, de cartes, etc...). Une expérience aléatoire se décrit mathématiquement par la donnée de l'ensemble des résultats possibles de l'expérience en question. Il est de tradition de noter $\Omega$ un tel résultat (parfois appelé ; éventualité" dans la suite) et de désigner par l'espace de tous ces résultats possibles.

# Plan de travail

1. Introduction au calcul des probabilités
2. Terminologie des probabilités
   - Evénement (d'une expèrience aléatoire)
   - Opération sur les évènements
3. Le concept de probabilité
   - Concept de probabilité conditionnelle
4. Quelques propriétés des probabilités conditionnelles
5. Concept dŠindépendance en probabilité
6. Formule de Probabilité totale et théorème de Bayes

# Espace ou ensemble fondamental

**Définition**

On appel espace fondamental noté $\Omega$ d'une expérience $(E)$, tous les résultats attendus de cette expérience.

## Exemple

- Pour l'experience $E_1$ : lancement d'un dé numéroté de 1 jusqu'a 6, l'espace fondamental est :

$$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- $E_2$ : "Jet d'une pièce", cette éxpèrience aura pour espace fondamental :

$$\Omega_2 = \{P, F\}$$

## Exemple

- Pour l'experience $E_1$ : lancement d'un dé numéroté de 1 jusqu'a 6, l'espace fondamental est :

$$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- $E_2$ : "Jet d'une pièce", cette éxpèrience aura pour espace fondamental :

$$\Omega_2 = \{P, F\}$$

## Exemple

- Pour l'experience $E_1$ : lancement d'un dé numéroté de 1 jusqu'a 6, l'espace fondamental est :

$$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- $E_2$ : "Jet d'une pièce", cette éxpèrience aura pour espace fondamental :

$$\Omega_2 = \{P, F\}$$

## Exemple

- Pour l'experience $E_1$ : lancement d'un dé numéroté de 1 jusqu'a 6, l'espace fondamental est :

$$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- $E_2$ : "Jet d'une pièce", cette éxpèrience aura pour espace fondamental :

$$\Omega_2 = \{P, F\}$$

## Exemple

- A l'instant $t = 0$ on met en fonctionnement un appareil et l'on s'intèresse au temps de bon fonctionnement :

$$\Omega_3 = \Re_+$$

- On lance deux dés et l'on s'intèresse à la somme des deux faces supérieures :

$$\Omega_4 = \{2, 3, 4, ..., 12\}$$

## Exemple

- A l'instant $t = 0$ on met en fonctionnement un appareil et l'on s'intèresse au temps de bon fonctionnement :

$$\Omega_3 = \Re_+$$

- On lance deux dés et l'on s'intèresse à la somme des deux faces supérieures :

$$\Omega_4 = \{2, 3, 4, ..., 12\}$$

## Exemple

- A l'instant $t = 0$ on met en fonctionnement un appareil et l'on s'intèresse au temps de bon fonctionnement :

$$\Omega_3 = \Re_+$$

- On lance deux dés et l'on s'intèresse à la somme des deux faces supérieures :

$$\Omega_4 = \{2, 3, 4, ..., 12\}$$

## Exemple

- A l'instant $t = 0$ on met en fonctionnement un appareil et l'on s'intèresse au temps de bon fonctionnement :

$$\Omega_3 = \Re_+$$

- On lance deux dés et l'on s'intèresse à la somme des deux faces supérieures :

$$\Omega_4 = \{2, 3, 4, ..., 12\}$$

# Evénement

## Définition

Un événement est un ensemble de résultats $\omega$ d'une expérience aléatoire possédant une même proprité.

## Exemple

Dans l'expérience du jet d'un dé, les formulations suivantes représentent des évenements :

- $\omega_1$ : "Avoir le chiffre 1"
- $\omega_2$ : "Avoir une chiffre impair"
- $\omega_3$ : "Avoir un chiffre inférieur à 3"

# Opérations sur les événements

- A tout événement $\omega$, on associée son contraire $\overline{\omega}$, qui représente son complémentaire dans l'ensemble fondammentale.
- L'événement impossible (qui ne se réalise jamais), sera noté $\emptyset$. L'équation $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1$ et $A_2$ sont disjoints, et signifie que $A_1$ et $A_2$ sont incompatibles.
- L'événement certain (qui se réalise toujours) sera noté $\Omega$.

# Opérations sur les évènements

| Événement | Terminologie ensembliste | Terminologie probabiliste | Signification de la réalisation de l'événement étudié |
|---|---|---|---|
| $\overline{A}$ | complémentation de A | négation de A | $\overline{A}$ se réalise si et seulement si A ne se réalise pas. |
| $A \cap B$ | intersection de A et B | conjonction de A et B | $A \cap B$ se réalise si et seulement si A **et** B se réalisent. |
| $A \cup B$ | réunion de A et B | réunion de A et B | $A \cup B$ se réalise si et seulement si A **ou** B se réalisent. |

# Quelques propriétés des opérations sur les évènements

| | |
|---|---|
| commutativité | $A \cap B = B \cap A$ <br> $A \cup B = B \cup A$ |
| associativité | $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$ <br> $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$ |
| distributivité | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ <br> $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ |
| lois de Morgan | $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ <br> $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ |

# Plan de travail

1. Introduction au calcul des probabilités
2. Terminologie des probabilités
   - Evénement (d'une expèrience aléatoire)
   - Opération sur les évènements
3. Le concept de probabilité
   - Concept de probabilité conditionnelle
4. Quelques propriétés des probabilités conditionnelles
5. Concept dŠindépendance en probabilité
6. Formule de Probabilité totale et théorème de Bayes

# Le concept de probabilité

Considérons une expérience aléatoire dont l'ensemble fondamental des résultats contient un nombre fini n de résultats, cŠest-à-dire $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$.

A chacun des $n$ événements simples (événements ne correspondant quŠà un seul résultat) qu'on peut définir pour cette expérience aléatoire correspond une probabilité de réalisation ; cŠest-à-dire à chacun des événements $\omega_i$ correspond une probabilité de réalisation $(P\{\omega_i\}), (i = 1, 2, ..., n)$. Ces n probabilités sont telles que : pour $i = 1, 2, ..., n, 0 \leq P(\omega_i) \leq 1$ et $\sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1$

Soit A un événement défini à partir de cette expérience, cŠest-à-dire soit A un sous-ensemble de W. La probabilité de réalisation de lŠévénement A peut se noter P(A) et, de façon générale,

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\{\omega_i\}) \qquad (1)$$

Si les $n$ éléments de l'ensemble $\Omega$ sont équiprobables, c'est-à-dire si $P(\omega_i) = \frac{1}{n}, i = 1, 2, ..., n$, alors :

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\#A}{\#n} \tag{2}$$

où le symbole $\#$ désigne la cardinalité (le nombre d'éléments) de l'ensemble qui le suit.

# Le concept de probabilité conditionnelle

**Définition (probabilité conditionnelle)**

Soit $A$ et $E$ deux événements où E a une probabilité de réalisation non-nulle. La probabilité conditionnelle de réalisation de l'événement $A$ étant donné que l'événement $E$ s'est réalisé est notée $P(A|E)$. Parfois, la probabilité conditionnelle $P(A|E)$ se calcule ou se déduit directement. Lorsque ce n'est pas le cas, on utilise la définition : $P(A|E) = P(A \cap E)/P(E)$.

# Plan de travail

1. Introduction au calcul des probabilités
2. Terminologie des probabilités
   - Evénement (d'une expèrience aléatoire)
   - Opération sur les évènements
3. Le concept de probabilité
   - Concept de probabilité conditionnelle
4. Quelques propriétés des probabilités conditionnelles
5. Concept dŠindépendance en probabilité
6. Formule de Probabilité totale et théorème de Bayes

# Quelques propriétés des probabilités conditionnelles

Les propriétés des probabilités de réalisation de deux événements A et B, s'étendent à la probabilité conditionnelle.
Soit $A, B$ et $E$ trois événements, où $E$ a une probabilité de réalisation non nulle.
$0 \leq P(A|E) \leq 1 \quad 0 \leq P(B|E) \leq 1$
$P(\overline{A}|E) = 1 - P(A|E)$ et $P(\overline{B}|E) = 1 - P(B|E)$

# Plan de travail

1. Introduction au calcul des probabilités
2. Terminologie des probabilités
   - Evénement (d'une expèrience aléatoire)
   - Opération sur les évènements
3. Le concept de probabilité
   - Concept de probabilité conditionnelle
4. Quelques propriétés des probabilités conditionnelles
5. Concept dŠindépendance en probabilité
6. Formule de Probabilité totale et théorème de Bayes

# Indépendance de 2 événements

Deux événements possibles A et B sont dits indépendants en probabilité si la réalisation de l'un ne modifie en rien la probabilité de réalisation de l'autre. On peut définir ce concept d'indépendance en probabilité de 2 événements possibles de 3 façons équivalentes :

1. $P(A|B) = P(A)$;
2. $P(A|B) = P(A)$;
3. $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

# Plan de travail

1. Introduction au calcul des probabilités
2. Terminologie des probabilités
   - Evénement (d'une expèrience aléatoire)
   - Opération sur les évènements
3. Le concept de probabilité
   - Concept de probabilité conditionnelle
4. Quelques propriétés des probabilités conditionnelles
5. Concept dŠindépendance en probabilité
6. Formule de Probabilité totale et théorème de Bayes

## Formule de Probabilité totale et théorème de Bayes

Soit $E_1, E_2, ..., E_k$ une suite d'événements qui forme une partition de $W$ et dont les probabilités de réalisation $P(E_i), i = 1, 2, ..., k$, sont connues et non nulles.
Soit A un événement quelconque pour lequel il est possible de calculer directement les probabilités conditionnelles de réalisation $P(A|E_i), i = 1, 2, ..., k$.
**Formule des probabilités totales**
$P(A) = P(A|E_1)P(E_1) + P(A|E_2)P(E_2) + ... + P(A|E_k)P(E_k)$
**Loi de Bayes**
$P(E_i|A) = P(AE_i)/P(A) = P(A|E_i)P(E_i)/P(A), i = 1, 2, ..., k.$

Merci de votre attention !