§1. Analyse combinatoire
Solutions du TD no. 1

1. **(a)** $A_{26}^{6} = \dfrac{26!}{20!} = 165\,765\,600$

(b) $A_{26}^{4} = \dfrac{26!}{22!} = 358\,800$

(c) 26^4

2. $2 \times \dbinom{8}{4} = 140$

3. $5! = 120$

4. $3! \times 4! = 144$

5. Il y a $10 \times 9 \times 8 = 720$ boules avec des numéros différents. Chaque triple de numéros peuvent être disposés en $3! = 6$ façons, et une seule de ces façons est dans l'ordre croissant. Ainsi, le nombre total de boules dans l'ordre croissant est $720/6 = 120$.

6. $A_{365}^{20} = 365 \times 364 \times \cdots \times 346$

7. **(a)** $\binom{14}{2} = 1001$

(b) $\binom{6}{2}\binom{8}{2} = 420$

8. **(a)** $26^2 \times 10^5$

(b) $A_{26}^{2} \times A_{10}^{5} = 19656000$

9. (a) $4! = 24$ (b) $2! \times 2! = 4$

10. $4! \times 3! \times 3! \times 3! = 5184$

11. Supposons qu'on a 3 garçons et 3 filles.

(a) $6! = 720$

(b) $3! \times 3! \times 2! = 72$

(c) $3! \times 4! = 144$

(d) $3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 72$

12. (a) $5! = 120$ (b) $\dfrac{7!}{4} = 1260$ (c) $\dfrac{11!}{4! \times 4! \times 2} = 34\,650$ (d) $\dfrac{7!}{4} = 1260$

13. Un enfant possède 12 cahiers: 6 noirs, 4 rouges, 1 blanc et 1 bleu.

(a) $\dfrac{12!}{6!4!1!1!} = 27720$

(b) $\dfrac{7!}{4!1!1!1!} = 210$

14. $\dbinom{10}{5}\dbinom{5}{2}\dbinom{3}{3} = 2520$

15. $\dfrac{10!}{5!5!2!} = 126$

16. **(a)** $8!$

(b) $2 \times 7!$

(c) $2 \times (4!)^2$

(d) $5! \times 4!$

(e) $4! \times (2)^4$

17. **(a)** $\binom{2}{0}\binom{6}{5} + \binom{2}{1}\binom{6}{4} = 36$

(b) $\binom{2}{0}\binom{6}{5} + \binom{2}{2}\binom{6}{3} = 26$

18. $(3x^2+y)^5 = 243x^{10} + 405x^8y + 270x^6y^2 + 90x^4y^3 + 15x^2y^4 + y^5$

19. $\binom{12}{3}\binom{9}{4}\binom{5}{5} = 27720$

20. **(a)** 4^8

(b) $\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2} = 2550$

21. $\binom{5}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{3} = 600$

22. **(a)** $\binom{10}{7} = 120$

(b) $\binom{5}{3}\binom{5}{4} + \binom{5}{4}\binom{5}{3} + \binom{5}{5}\binom{5}{2} = 110$

23. **(a)** $\binom{12}{4}$

(b) $\binom{3}{1}\binom{3}{3} + \binom{3}{2}\binom{9}{2} + \binom{3}{3}\binom{9}{1}$

(c) $\binom{3}{2}\binom{9}{2}$

24. **(a)** $\binom{6}{2} + \binom{7}{2} + \binom{4}{2} = 42$

(b) $6 \cdot 7 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 4 = 94$

25. Montrer les identités suivantes:

(a) $\binom{n+m}{r} = \binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \cdots + \binom{n}{r}\binom{m}{0}$
Si on a m hommes et n femmes, de combien de façons peut choisir un groupe de r personnes parmi les $n+m$.

(b) $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$. On utilise (a) avec $m = n$ ainsi que l'identité $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(c) $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$ .On pose $f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$, puis on calcule $f'(1)$