

§1. Analyse combinatoire

1. On dispose des six premières lettres de l'alphabet.
 - (a) Combien de sigles de 6 lettres distinctes peut-on former?
 - (b) Combien de sigles de 4 lettres distinctes peut-on former?
 - (c) Combien de sigles de 4 lettres peut-on former ?
2. Huit personnes se répartissent dans deux voitures de quatre places. Combien de possibilités peut-on dénombrer?
3. De combien de manières peut on arranger les nombres 1, . . . , 5 comme, 13524, 25134, etc?
4. Combien d'arrangements différents y a t-il des nombres 1, 2, . . . , 7, telle que les 3 premiers chiffres sont 1, 2, 3 (dans n'importe quel ordre) et les 4 derniers chiffres sont 4, 5, 6, 7 (dans n'importe quel ordre)?
5. Une urne a 1000 balles, marqués 000, 001, . . . , 999. Combien de balles y a t'il qui ont tous les numéros dans l'ordre croissant (par exemple 047 et 489, mais pas 033 ou 321)?
6. Dans un groupe de 20 personnes chaque personne a une date de naissance différente. Combien d'arrangements différents de ces anniversaires y a t'il (en supposant que dans chaque année il y a 365 jours)?
7. Lors d'un recrutement pour 4 postes identiques, 6 femmes et 8 hommes se présentent.
 - (a) Combien de recrutements distincts sont possibles?
 - (b) Sachant que l'on embauche 2 hommes et 2 femmes, combien de recrutements distincts sont possibles ?
8. Combien existe-t-il de plaques minéralogiques à 7 caractères
 - (a) si les deux premiers sont des lettres et les 5 autres des chiffres?
 - (b) même question en supposant que les répétitions de lettres ou de chiffres sur la même plaque sont exclues.
9. John, Jim, Jay et Jack ont formé un orchestre à 4 instruments. Si chacun des garçons peut jouer des 4 instruments, combien d'arrangements peut-on concevoir? Que se passe-t-il si John et Jim peuvent jouer des 4 instruments mais si Jay et Jack ne savent jouer qu'au piano ou à la batterie?
10. On doit asseoir sur un rang 4 Américains, 3 Français et 3 Anglais. Les gens de même nationalité doivent rester ensemble. Combien de dispositions peut-on imaginer?
11. Supposons qu'on a 3 garçons et 3 filles.
 - (a) de combien de manières peut-on asseoir en rang les 3 garçons et 3 filles?
 - (b) même question si les garçons doivent rester ensemble et les filles aussi;
 - (c) même question si seuls les garçons doivent rester ensemble;

- (d) même question si deux personnes du même genre ne doivent jamais voisiner.
12. Combien d'arrangements différents peut-on faire avec les lettres des mots suivants:
 (a) PINTE (b) PROPOSE (c) MISSISSIPPI (d) ARRANGE
13. Un enfant possède 12 cahiers: 6 noirs, 4 rouges, 1 blanc et 1 bleu.
- (a)) De combien de manières peut-il les ranger ?
 (b) S'il tient à placer les noirs les uns derrière les autres, de combien de manières peut-il les ranger?
14. Le poste de police d'une petite ville compte 10 agents. Si l'organisation de ce poste est d'avoir 5 agents en patrouille, 2 au poste travaillant activement et les 3 autres au poste également mais de réserve, à combien de répartitions de ces agents en trois groupes ainsi définis peut-on procéder?
15. Pour disputer un match de basketball, 10 garçons se répartissent en deux équipes de 5. De combien de manières peuvent-ils procéder?
16. Supposant qu'il y a 4 hommes et 4 femmes. De combien de manières peut-on asseoir les 8 personnes en rang si:
- (a) aucune restriction n'est mise;
 (b) les personnes A et B veulent être ensemble;
 (c) les hommes ne doivent avoir que des voisines et inversement;
 (d) les hommes, qui sont 5, doivent rester ensemble;
 (e) les personnes forment 4 couples de gens mariés et si chaque couple doit rester réuni.
17. Une femme a 8 amies et décide d'en inviter 5 à prendre le thé.
- (a) De combien de manières peut-elle s'y prendre si deux d'entre elles ne viendront pas ensemble?
 (b) Et si au contraire deux d'entre elles ne viendront que si l'autre est aussi invitée?
18. Développer $(3x^2 + y)^5$.
19. Si 12 personnes doivent être réparties en 3 comités comptant respectivement 3, 4 et 5 individus, de combien de manières peut-on s'y prendre?
20. Huit nouveaux professeurs vont être envoyés dans 4 écoles.
- (a) Combien y a-t-il d'affectations possibles?
 (b) Qu'en est-il si l'on impose que chaque école recevra deux professeurs?
21. On veut former un comité de 7 personnes, dont 2 républicains, 2 démocrates et 3 indépendants. On a le choix parmi 5 républicains, 6 démocrates et 4 indépendants. De combien de manières peut-on procéder?
22. Un étudiant doit répondre à 7 des 10 questions d'un examen;
- (a) de combien de manières peut-il les choisir?
 (b) même question s'il est obligé de choisir au moins 3 des 5 premières questions?

23. Une classe comporte 9 garçons et 3 filles,

- (a) De combien de manières le professeur peut-il faire un choix de 4 élèves ?
- (b) Combien de ces choix comportent au moins une fille ?
- (c) Combien comportent exactement une fille ?

24. An étudiant veut vendre 2 livres parmi une collection de 6 math, 7 science, et 4 économie. Combien de choix possibles il y a t-ils si

- (a) les deux livres sont sur le même sujet?
- (b) les livres sont sur des sujets différents?

25. Montrer les identités suivantes:

(a)
$$\binom{n+m}{r} = \binom{n}{0} \binom{m}{r} + \binom{n}{1} \binom{m}{r-1} + \cdots + \binom{n}{r} \binom{m}{0}$$

(b)
$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

(c)
$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$