Université Ferhat Abbas, Sétif I

Département de mathématiques

Introduction aux Probabilités

§2. Axiomes de probabilités

1. Soient A et B deux événements élémentaires. Donner une expression et représenter le diagramme de Venn de l'événement tel que :

(a) A est réalisé mais non B, c.à.d. que seulement A se réalise ;

(b) soit A, soit B, se réalise, mais pas les deux en même temps ; c.à.d. exactement un seul des deux événements se produit.

2. Soient A, B et C des événements élémentaires. Trouver une expression et représenter le diagramme de Venn de l'événement tel que

(a) A et B mais non C se réalise ;

(b) A seulement se réalise.

3. On jette en l'air une pièce de monnaie et un dé, et l'on suppose que l'ensemble fondamental S se compose des 12 éléments :

$$S = \{F1, F2, F3, F4, F5, F6, P1, P2, P3, P4, P5, P6\}$$

(i) Exprimer d'une façon explicite les événements suivants :
A = {face et un nombre pair apparaissent},
B = {un nombre premier apparaît},
C = { pile et un nombre impair apparaissent}.

(ii) Exprimer d'une façon explicite l'événement :
(a) A ou B est réalisé,
(b) B et C est réalisé,
(c) B seulement est réalisé. (iii) Lesquels des événements A, B et C s'excluent mutuellement ?

4. On suppose qu'un ensemble fondamental $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Laquelle des fonctions suivantes définit une probabilité sur Ω ?

(i)

ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$P(\omega_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

(ii)

ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$P(\omega_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

(iii)

ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$P(\omega_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

(iv)

ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$P(\omega_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0

5. Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, et soit P une probabilité sur Ω. Completer les tableaux suivants:

(i)

ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$P(\omega_i)$	k	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$

(ii)

ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$P(\omega_i)$	$2k$	k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

(iii)

ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$P(\omega_i)$	$\frac{1}{2}$	k	k	$3k$

(iv)

ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$P(\omega_i)$	$\frac{1}{k}$	$\frac{2}{k}$	$\frac{3}{k}$	$\frac{4}{k}$

6. On pipe une pièce de monnaie de telle sorte que face apparaisse deux fois plus que pile. Calculer $P(P)$ et $P(F)$.

7. On pipe un dé de telle sorte que la probabilité du résultat obtenu quand on jette le dé soit proportionnelle au résultat (par exemple, 6 a une probabilité deux fois plus grande que 3).
Soit A = {nombre pair}, B = {nombre premier}, C = {nombre impair}.

(i) Donner la probabilité de chaque résultat possible.

(ii) Calculer P (A) , P(B) , et P(C) .

(iii) Calculer la probabilité pour que :

(a) on obtienne un nombre pair ou un nombre premier.

(b) on obtienne un nombre premier impair ;

(c) A mais non B se réalise.

8. Calculer la probabilité p de chacun des événements suivants :

(i) un nombre pair apparaît quand on jette un dé bien équilibré ;

(ii) un roi apparaît quand on tire une seule carte d'un jeu de cartes ordinaire de 52 cartes ;

(iii) pile apparaît au moins une fois quand on jette trois pièces de monnaie bien équilibrées ;

(iv) on obtient une bille blanche en tirant une seule bille dans une urne contenant 4 billes blanches, 3 billes rouges et 2 billes bleues.

9. On joue à pile ou face en lançant une pièce trois fois.

(**a**) Quelle est la probabilité d'avoir face au moins une fois ?

(**b**) Quelle est la probabilité d'avoir exactement une face ?

10. Un magasin accepte les cartes de crédit American Express ou VISA. 24% de ses clients possèdent une carte American Express, 61% une VISA et 11% possèdent les deux. Quel est le pourcentage de clients ne possédant pas une carte de crédit acceptée par le magasin ?

11. On tire au hasard deux cartes d'un jeu ordinaire de 52 cartes. Calculer la probabilité p pour que

(i) les deux cartes soient des piques,

(ii) une carte soit un pique et l'autre soit un cœur.

12. On prend au hasard trois ampoules électriques d'un lot de 15 ampoules dont 5 sont défectueuses. Calculer la probabilité p pour que

(i) aucune ampoule ne soit défectueuse,

(ii) exactement une ampoule soit défectueuse,

(iii) au moins une ampoule soit défectueuse.

13. Une classe comporte 10 garçons dont la moitié a les yeux marron et 20 filles dont la moitié a également les yeux marron. Calculer la probabilité p pour qu'une personne tirée au hasard soit un garçon ou ait les yeux marron.

14. Dans un restaurant universitaire, on propose deux desserts à chaque repas. La probabilité que l'un d'eux soit un yaourt est $\frac{4}{10}$, une orange$\frac{8}{10}$. La probabilité que les deux desserts soient un yaourt et une orange est $\frac{3}{10}$. Calculer la probabilité que l'on propose:

(**a**) un yaourt et pas d'orange ?

(b) une orange et pas de yaourt ?

(c) ni yaourt, ni orange ?

15. Soient A et B des événements tels que $P(A) = \frac{3}{8}, P(B) = \frac{1}{2}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Calculer: (i) $P(AUB)$, (ii) $P(\overline{A})$ et $P(\overline{B})$, (iii) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$, (iv) $P(\overline{A}U\overline{B})$, (v) $P(A \cap \overline{B})$, (vi) $P(B \cap \overline{A})$.

16. Événements A et B sont des tels que $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$ et $P(A \cap B) = 0.1$.

(1) Quelle est la probabilité que A ou B arrivent?
(2) Quelle est la probabilité que exactement un des deux évènements arrive?
(3) Quelle est la probabilité qu'au plus un des deux évènements arrive?
(4) Quelle est la probabilité que ni A ni B n'arrivent?

17. On considère un espace fondamental $\Omega = \{a, b, c, d\}$. On définit les événements $E = \{a, d\}$; $F = \{a, b, c\}$ et $G = \{b, d\}$: Peut-on trouver une (ou plusieurs) mesure(s) de probabilité sur Ω vérifiant l'une des trois séries de conditions:

1. $P(E) = 0.5$ $\quad P(F) = 0.9 \quad P(G) = 0.4$?
2. $P(E) = 0.6$ $\quad P(F) = 0.8 \quad P(G) = 0.7$?
3. $P(E) = P(F) = P(G)$?

Déterminer le cas échéant ces mesures de probabilité.

18. Montrer que si A et B sont indépendants soit aussi :
(a) A et B^c (b) A^c et B^c

19. Trouver une expression simple pour les évènements suivants:
(a) $(E \cup F) \cap (E \cup F^c)$ (b) $(E \cup F) \cap (E^c \cup F) \cap (E \cup F^c)$ (c) $(E \cup F) \cap (F \cup G)$.

20. Si $P(E) = 0.9$ et $P(F) = 0.8$, montrer que $P(EF) \geq 0.7$.
De manière plus générale, démontrer l'inégalité de Bonferroni, à savoir

$$P(EF) \geq P(E) + P(F) - 1.$$

21. Montrer que
1. $P(EF^c) = P(E) - P(EF)$.
2. $P(E \cup F \cup G) = P(E) + P(F) + P(G) - P(EF) - P(EG) - P(FG) + P(EFG)$.
3.$P(E \cup F \cup G) = P(E) + P(F) + P(G) - P(E^cFG) - P(EF^cG) - P(EFG^c) - 2P(EFG)$.

22. On jette une paire de dés bien équilibrés. Calculer la probabilité p pour que la somme obtenue soit supérieure ou égale à 10, sachant que
(i) le premier dé a donné 5,
(ii) au moins l'un des dés a donné 5.

23. On jette trois pièces de monnaie bien équilibrées. Calculer la probabilité p pour que toutes les trois donnent face, sachant que
(i) la première pièce donne face à priori,
(ii) l'une des pièces donne face à priori.

24. On tire au hasard deux des chiffres de 1 à 9. Sachant que la somme obtenue est paire, calculer la probabilité p pour que les deux chiffres soient impairs.

25. Une classe contient 12 garçons et 4 filles. Si l'on choisit trois élèves de la classe au hasard, quelle est la probabilité p pour que tous soient des garçons ?

26. Un joueur obtient l'une après l'autre 5 cartes d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité p pour qu'elles soient toutes des piques ?

27. Une urne contient 7 billes rouges et 3 billes blanches. On tire trois billes de l'urne, l'une après l'autre. Calculer la probabilité p pour que les deux premières billes soient rouges et la troisième soit blanche.

28. Dans un lycée du Quartier Latin, 25% des élèves échouent en mathématiques, 15% échouent en chimie, et 10% échouent à la fois en mathématiques et en chimie. On choisit un élève au hasard.

- **(a)** Si l'élève a échoué en chimie, quelle est la probabilité pour qu'il ait aussi échoué en mathématiques ?
- **(b)** Si l'élève a échoué en mathématiques, quelle est la probabilité pour qu'il ait aussi échoué en chimie ?
- **(c)** Quelle est la probabilité pour qu'il ait échoué en mathématiques ou en chimie ?

29. On considère deux événements A et B tels que $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Calculer (i) $P(A|B)$, (ii) $P(B|A)$, (iii) $P(A \cup B)$, (iv) $P(A^c|B^c)$, (v) $P(B^c|A^c)$.

30. On jette deux dés équilibrés. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux montre 6, sachant que les deux résultats sont différents?

31. On considère une population composée de 48% d'hommes et de 52% de femmes. La probabilité qu'un homme soit daltonien est 5%, la probabilité qu'une femme soit daltonienne est 0.25%.

- (**a**) Quelle proportion de la population est-elle daltonienne?
- (**b**) probabilité qu'il s'agisse d'un homme ?

32. Dans une entreprise, une machine A fabrique 40% des pièces et une machine B en fabrique 60%. La proportion de pièces défectueuses fabriquées par A est de 3% et par B de 2%. On choisit une pièce au hasard.

- (**a**) Calculer la probabilité qu'elle soit défectueuse.
- (**b**) Sachant qu'elle est défectueuse, calculer la probabilité qu'elle soit fabriquée par A.

33. Une armoire contient 10 paires de chaussures et on en tire 8 chaussures au hasard. Quelle est la probabilité:

- (**a**) qu'il n'y ait aucune paire?
- (**b**) qu'il y ait une paire exactement?