Université Ferhat Abbas, Sétif I
Département de mathématiques
Introduction aux Probabilités
§3. Variables aléatoires discrètes

1. Soit X la variable aléatoire admettant la loi de probabilité suivante :

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{10}$

Calculer la fonction de répartition $F(x)$, l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $\text{Var}(X)$.

2. Calculer la fonction de repartion $F(x)$, l'espérance mathématique μ, la variance σ^2 et l'écart-type σ de chacune des lois de probabilité suivantes :

(i)

x_i	2	3	11
$f(x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

(ii)

x_i	-5	-4	1	2
$f(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

(iii)

x_i	-1	0	3
$f(x_i)$	p	p	p

3. On jette un dé bien équilibré. Soit X la variable représentant le double du nombre obtenu, et Y une variable prenant les valeurs 1 ou 3 suivant que l'on obtient soit un nombre impair, soit un nombre pair. Calculer la distribution, l'espérance, la variance et l'écart-type de:
(i) X (ii) Y (iii) $X+Y$ (iv) XY

4. On lance simultanément deux dés bien équilibrés. On dénote par X la valeur absolue de la différence et par Y la somme des nombres qui apparaissent.
1. Quelle est la loi de probabilité de X, $E(X)$ et $\text{Var}(X)$.
2. Quelle est la loi de probabilité de Y, $E(Y)$ et $\text{Var}(Y)$.

5. On tire au hasard un échantillon de 3 articles dans une boite contenant 12 articles dont 3 sont défectueux. Calculer l'espérance mathématique E du nombre d'articles défectueux auquel on peut s'attendre.

6. Un joueur lance deux pièces de monnaie bien équilibrées. Il gagne 1 point ou 2 points selon qu'il obtient 1 ou 2 faces. Par contre, il perd 5 points s'il n'obtient aucune face. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la partie et dire si le jeu est favorable au joueur.

7. La fonction de répartition d'une variable X est la suivante:

x	$x<0$	$0\le x<1$	$1\le x<2$	$2\le x<3$	$3\le x<4$	$x\ge 4$
$F(x)$	0	$1/2$	$3/5$	$4/5$	$9/10$	1

Trouver la loi de probabilité de X et calculer $P\left\{\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2}\right\}$ et la variance $\text{Var}(X)$.

8. Tracer la fonction de répartition de la variable aléatoire X admettant la loi suivante :

x_i	1	3	4	6	9
p_i	$2/10$	$2/10$	$1/10$	$2/10$	$3/10$

9. Soit X la variable aléatoire admettant la loi de probabilité $P(X=k) = \frac{c}{k^2}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Trouver c tel que la loi soit une loi de probabilité. Rapel: $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$. Montrer que $E(X)$ n'existe pas.

10. On classe cinq hommes et cinq femmes selon leurs résultats lors d'un examen. On fait l'hypothèse que tous les scores sont différents et que les $10!$ classements possibles ont tous la même probabilité. On désigne le rang de la meilleure femme par X (par exemple X vaudra 2 si le meilleur résultat a été obtenu par un homme et le suivant par une femme). Trouver $P(X=i), i = 1, 2, ..., 10$.

11. On tire une boule d'une urne en contenant 4 blanches et 3 noires. On la remplace après tirage, pour recommencer indéfiniment cette séquence d'opérations. Quelle est la probabilité de trouver exactement deux boules blanches parmi les quatre premières boules tirées?

12. Un examen est administré sous forme d'un questionnaire de 5 questions à 3 choix multiples chacune. Quelle est la probabilité qu'un étudiant obtienne 4 bonnes réponses ou plus en devinant?

13. Une équipe A a la probabilité $\frac{2}{3}$ de gagner chaque fois qu'elle joue. Sachant que A joue 4 parties, calculer la probabilité pour que A gagne

(a) exactement 2 parties,

(b) au moins une partie,

(c) plus de la moitié des parties.

14. On admet que la probabilité de défaut pour un objet fabriqué à la machine est égale à 0.1. On considère un lot de 10 objets fabriqués par cette machine. Soit X le nombre d'objets défectueux parmi ceux-ci.

(a) Comment s'appelle la loi suivie par X ?

(b) Que valent $E(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$?

(c) Quelle est la probabilité que le lot comprenne au plus 1 objet défectueux ?

(d) Retrouver ce résultat grâce à l'approximation par une loi de Poisson.

15. On admet que le nombre d'accidents survenant sur une autoroute quotidiennement est une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda = 3$.

(a) Quelle est la probabilité qu'il survienne 3 accidents ou plus lors d'un jour donné?

(b) Même question si l'on sait qu'un accident au moins a eu lieu.

16. A un concours se présentent deux fois plus d'hommes que de femmes. On tire une personne au hasard, et on appelle X la variable aléatoire "nombre de femmes".
Quelle loi suit la variable X ? Calculer $E(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

17. La probabilité pour qu'un tireur atteigne une cible est $1/4$.

(a) En supposant qu'il tire 7 fois, quelle est la probabilité pour qu'il atteigne la cible au moins deux fois ?

(b) Combien de fois doit-il tirer pour que la probabilité qu'il atteigne la cible au moins une fois soit plus grande que $2/3$?

18. Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ une variable aléatoire suivant la loi binômiale. Demontrer que $E(X) = np$ et $Var(X) = npq$.

19. Calculer le nombre moyen de garçons dans une famille de 8 enfants, en supposant que la distribution des gendres est équiprobable. Quelle est la probabilité pour que la famille ait un nombre de garçons égal à ce nombre moyen ?

20. Un homme prétend avoir des capacités de perception extrasensorielle. Lé test qu'on lui administre consiste à lui faire deviner les 10 résultats des 10 jets d'une pièce équilibrée. Il donne 7 bonnes réponses. Quelle est la probabilité qu'il obtienne un résultat aussi bon ou meilleur s'il n'a aucune capacité de perception extrasensorielle?

21. Au poker, la probabilité de se voir distribuer une main pleine est approximativement 0,0014. Calculer une approximation de la probabilité d'obtenir au moins deux mains pleines sur 1000 donnes.

22. Les gens entrent dans un bureau au rythme d'une personne toutes les deux minutes.

- **(a)** Quelle est la probabilité qu'il n'entre personne entre 12 h et 12 h 05?
- **(b)** Quelle est la probabilité que 4 personnes au moins se présentent durant cette période?

23. La probabilité pour qu'une ampoule électrique ait une durée de vie supérieure à deux ans est égale à $p = \frac{3}{10}$. Sachant qu'un lustre possède cinq ampoules, calculer:

- **(a)** la probabilité de ne pas changer d'ampoules en deux ans,
- **(b)** la probabilité de changer toutes les ampoules en deux ans.
- **(c)** le nombre moyen d'ampoules changées en deux ans.

24. Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$ une variable aléatoire géométrique. Montrer que

- **(a)** $P(X > n) = (1-p)^n$.
- **(b)** $F(n) = P(X \leq n) = 1 - (1-p)^n$.
- **(c)** $P(X > n + m | X > m) = P(X > n)$.

On dit que la variable aléatoire X est sans mémoire.

25. Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ poisson avec paramètre λ . Montrer que la loi $P(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ est une loi de probabilité et que $E(X) = \mathrm{Var}(X) = \lambda$.

26. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des v.a.i. et $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$ (poisson avec paramètre λ_i) et $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Trouver la fonction génératrice de moment de X. Quelle est la loi de probabilité de X?

27. Soit X une variable aléatoire de Poisson avec paramètre λ. Quelle est la valeur de λ qui maximise $P\{X = k\}, k \geq 0$?