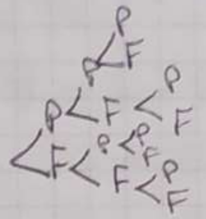
18/10/2022.

Exo 1:



l'ensemble Ω est : $\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$

X : est le nombre de face obtenue.

$X(PPF) = X(PFP) = X(FPP) = 1$ | $X(PPP) = 0$ | $X(PFF) = X(FFP) = X(FPF) = 2$

$X(FFF) = 3$

d'où : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

la loi de probabilité de X est :

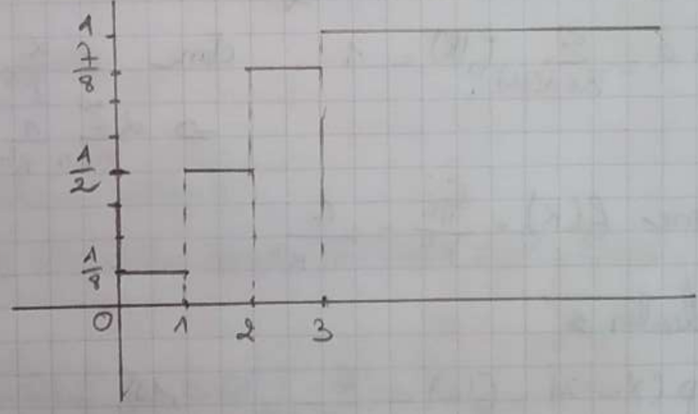
k	0	1	2	3	$\sum_{k=0} P(X=k)$
$P(X=k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Ex 02: La fonction de repartition de X est :

- si $x < 0$ $F(x) = P(\phi) = 0$
- si $x < 1$ $F(x) = P(X=0) = \frac{1}{8}$
- si $x < 2$ $F(x) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

si $x < 3$ $F(x) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$

si $x \geq 3$ $F(x) = \sum_{x=0}^{3} P(x=k) = 1$.



Exo2: 1) Détermination α :

on sait que $\sum_{i=1}^{5} P(X=i) = 1$ Alors $\alpha(7-1) + \alpha(7-2) + \alpha(7-3) + \alpha(7-4) + \alpha(7-5) = 1$

donc $6\alpha + 5\alpha + 4\alpha + 3\alpha + 2\alpha = 1$

Alors $20\alpha = 1$ Alors $\alpha = \frac{1}{20}$

D'où $f(i) = \frac{7-i}{20}$, $i = \overline{1, 5}$

2) Calculer $P(X^2-5X+6=0)$

On a : $X^2-5X+6=(X-2)(X-3)$

$P(X^2-5X+6)=P((X-2)(X-3)=0)$

$=P(X-2=0 \text{ ou } X-3=0)$

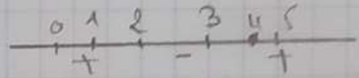
$=P(X=2 \text{ ou } X=3)$

$=P(X=2)+P(X=3)$ car $(X=2)\cap(X=3)=\emptyset$

$=\frac{7-2}{20}+\frac{7-3}{20}=\frac{9}{20}$

3) Calculer $P(X^2-5X+6>0)$

le signe de $(X-2)(X-3)$



le signe $X^2-5X+6=(X-2)(X-3)$ est =

X	$-\infty$ 1	2	3 4 5 $+\infty$
$(x-2)(x-3)$	+	-	+

Donc $X^2-5X+6>0$ pour $X=1$ ou $X=4$

ou $X=5$

d'où $P(X^2-5X+6>0)=P(X=1)+P(X=4)+P(X=5)=\frac{7-1}{20}+\frac{7-4}{20}+\frac{7-5}{20}$

$=\frac{11}{20}$

EXO3 : Déterminer α :

on a : $\sum_{k\in X(\Omega)} f(k)=1$ donc $\sum \frac{\alpha}{k^2}=1$

$\Rightarrow \alpha\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=1 \Rightarrow \alpha\frac{\pi^2}{6}=1$

$\Rightarrow \alpha=\frac{6}{\pi^2}$

donc $f(k)=\frac{\frac{6}{\pi^2}}{k^2}=\frac{6}{\pi^2k^2}$

Calculer :

- $P(X=2)=f(2)=\frac{6}{\pi^2(2)^2}=0,15$
- $P(X\leq 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=f(1)+f(2)+f(3)$

$=\frac{6}{\pi^2}+0,15+\frac{6}{\pi^2(3)^2}$

$=0,6+0,15+0,067$

$=0,817.$

25/10/2022

2) Calcul

$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 3)$

$= 1 - 0{,}82$

$\approx 0{,}19$

Exo 4 :

1) l'espace des événements de cette expérience aléatoire est : $\Omega = \{S_i$ un sujet parmi les 100 sujets $\}$ avec $i = 1, 2, 3$

1) On note

A_1 : " le candidat ayant révisé les 3 sujets tirés "

$$P(A_1) = \frac{C_{60}^3}{C_{100}^3} = \frac{34220}{161700} \approx 0{,}21$$

A_2 : " Le candidat ayant révisé exactement deux sujets sur les trois sujets tirés ".

$$P(A_2) = \frac{C_{60}^2 \cdot C_{40}^1}{161700} = \frac{70800}{161700} \approx 0{,}44$$

A_3 : " Le candidats n'ayant révisé aucun sujet des trois sujets tirés :

$$P(A_3) = \frac{C_{40}^3}{C_{100}^3} = \frac{9880}{161700} \simeq 0{,}06$$

notons X : la variable aléatoire représente le nombre des sujets révisé par le candidat parmi les trois sujets tirés :

on a $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

donc la loi de X est défini par : $P(X = k) = \dfrac{C_{60}^k \cdot C_{40}^{3-k}}{C_{100}^3}$

avec $k = \{0, 1, 2, 3\}$.

Exo 5 :

$$f(k) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{k(k+1)} & \text{si } k \geq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

① Déterminer λ

f est une loi de probabilité $\Leftrightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{k(k+1)} = 1$

$\Leftrightarrow \lambda \times \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$ ① On pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{\alpha}{k} + \frac{\beta}{k+1} = \frac{\alpha(k+1) + \beta k}{k(k+1)} = \frac{(\alpha+\beta) k + \alpha}{k(k+1)}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = 1 \end{cases}$

On remarque que $\forall k \geq 1$, on a : $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ d'où $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$

$= 1$

$\Rightarrow$ ① $\lambda \times 1 = 1 \Rightarrow \lambda = 1$. donc $f(k) = \begin{cases} \frac{1}{k(k+1)}, \text{ si } k \geq 1 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

2) La fonction de répartition F de X est :

si $x < 1$: $F(x) = 0 = P(\emptyset)$

si $i \leq x < i+1$ avec $i \in \mathbb{N}^*$ $F(x) = \sum_{k=1}^{i} f(k) = \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{k(k+1)}$

$= \sum_{k=1}^{i} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$= 1 - \frac{1}{i+1}$

$= \frac{i}{i+1}$

d'où $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ \frac{i}{i+1} \text{ si } i \leq x < i+1 \text{ avec } i \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

07/11/2022

Exo 6 :

1) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, \text{ si } 1 \leq x \leq 4 \\ 0 \text{ sinon } x \in]-\infty, 1[\cup]4, +\infty[\end{cases}$

La fonction de répartition F de X est :

$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$

si $x < 1$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0$

si $1 \leq x < 4$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{1} \overset{0}{f(t)}\, dt + \int_{1}^{x} f(t)\, dt = \int_{1}^{x} \frac{dt}{3} = \frac{t}{3}\Big|_{1}^{x}$

$= \frac{x-1}{3}$

si $x \geq 4$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{1} \overset{0}{f(t)}\, dt + \int_{1}^{4} f(t)\, dt + \int_{4}^{x} \overset{0}{f(t)}\, dt =$

$= \frac{t}{3} \Big|_1^4 = 1$

d'où $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ \frac{x-1}{3} \text{ si } 1 \le x < 4 \\ 1 \text{ si } x \geq 4 \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} 3x^2, \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

si $x < 0$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

si $0 \leq x < 1$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} \cancel{f(t)\,dt} + \int_{0}^{x} f(t)\,dt$

$= \int_0^x 3x^2\,dt$

$= t^3 \Big|_0^x = x^3$

si $x > 1$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} \cancel{f(t)\,dt} + \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^{+\infty} \cancel{f(t)}\,dt$

$= t^3 \Big|_0^1$

$= 1$

$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x^3 \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

Exo 7 :

1) $f(x) = \begin{cases} ax - \frac{3}{2} \text{ si } x \in [0, 1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

f est une densité de probabilité $\iff \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$

on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} \cancel{f(t)\,dt} + \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^{+\infty} \cancel{f(t)}\,dt = 1$

$\Rightarrow \int_0^1 \left(at - \frac{3}{2}\right) dt = 1$

$\Rightarrow \frac{at^2 - 3t}{2} \Big|_0^1 = 1$

$\Rightarrow \frac{a-3}{2} = 1 \Rightarrow a = 5$

f est une densité de probabilité pour $a = 5$.

Si X est continue

$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$

$P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$

$P(X \geq a) = 1 - P(X \leq a)$

$= 1 - \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$

* Calcule $P(X \geq 2)$

$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 2)$

$= 1 - \int_{-\infty}^{2} f(x)\,dx$

$= 1 - \cancelto{0}{\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx} + \int_0^1 f(x)\,dx + \cancelto{0}{\int_1^2 f(x)\,dx}$

$= 1 - \int_0^1 \left(5x - \frac{3}{2}\right) dx$

$= 1 - \left.\frac{5x^2 - 3x}{2}\right|_0^1$

$P(X \geq 2) \overset{= 1 - 1}{=} 0$

* Calcule $P(X < x_0) = \frac{1}{2}$

On a : $P(X < x_0) = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{x_0} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \int_0^{x_0} \left(5x - \frac{3}{2}\right) dx = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \left.\frac{5x^2 - 3x}{2}\right|_0^{x_0} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{5x_0^2 - 3x_0}{2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 5x_0^2 - 3x_0 - 1 = 0$

$\Rightarrow (x_0 - 0{,}84)(x_0 + 0{,}22) = 0$

$\notin [0, 1]$ impossible

La valeur $x_0 = 0{,}84$

Ex8 : $f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\frac{1}{2}x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } & x \leq 0 \end{cases}$

f est une densité de probabilité $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$

On a : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} \cancel{f(t)\,dt} + \int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt \Rightarrow \alpha \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x}\,dx = 1$

$\Rightarrow -2\alpha e^{-\frac{1}{2}x}\Big|_{0}^{+\infty} = 1$

$\Rightarrow 2\alpha = 1$

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$.

d'où $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{2}, \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$

22) M \ 2022.

2) Calculer : • Dans ce cas, X suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$, $X \rightsquigarrow \exp(\frac{1}{2})$

$E(X) = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$

$V(X) = \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^2} = 4$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{4} = 2$

La fonction de répartition F de X est : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

si $x < 0$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

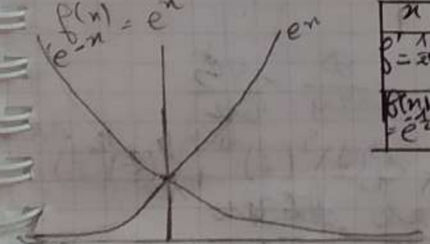
si $x \geq 0$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} \cancel{f(t)\,dt} + \int_{0}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{x} e^{-\frac{1}{2}t}\,dt$

$= -e^{-\frac{1}{2}t}\Big|_{0}^{x}$

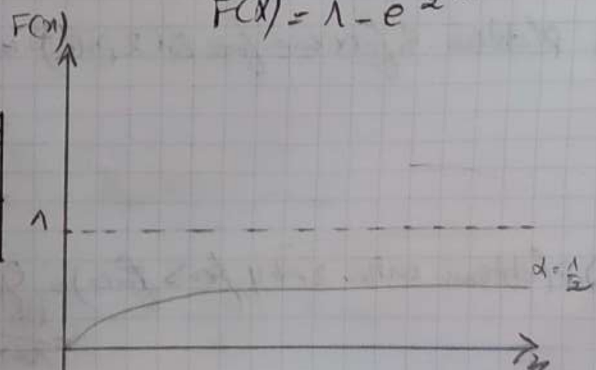
$= -e^{-\frac{1}{2}x} + 1$

$F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{2}x}$

$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{2}x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$



x	0	$+\infty$
$f' = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$	$+$	
$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$	$0 \nearrow$	1



Exo 9.

Dans ce cas X suit la loi hypergéométrique : $X \rightsquigarrow H(n, n_1, r)$

avec : $n = 11$; $n_1 = 6$, $r = 3$

Donc : $P(X=k) = \dfrac{C_{n_1}^{k} \, C_{n-n_1}^{r-k}}{C_n^r}$ où $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$= \frac{C_6^k \cdot C_5^{3-k}}{C_{11}^3}$$

1) Déterminer la fonction de répartition :

$F(x) = P(X \leq k)$

2) $P(X>1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$

$$= 1 - \frac{C_6^0 \cdot C_5^3}{C_{11}^3} - \frac{C_6^1 \cdot C_5^2}{C_{11}^3}$$

$$= 1 - \frac{10}{165} - \frac{60}{165} = \frac{95}{165} \simeq 0,58$$

Série N° 3 :

Exo 1 : $p = \frac{1}{2}$ $\quad n = 10$

$P(X=k) = C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$ $\quad k = X(\Omega) = 0, 1, \dots, n$

$$= C_{10}^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{10-k}$$

1) $P(\text{obtenir 10 fois une face}) = C_{10}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10-10}$

$$= \frac{1}{(2)^{10}} = \frac{1}{1024}$$

2) $P(\text{obtenir 8 fois une face et 2 pile}) = C_{10}^8 \left(\frac{1}{2}\right)^8 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-8} + C_{10}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-2}$

$$= 45 \cdot \frac{1}{256} \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{45}{1024} + \frac{45}{1024} = \frac{90}{1024} = \frac{45}{512}$$

3) $P(\text{obtenir entre 2 et 4 fois face}) = C_{10}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-2} + C_{10}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-3} + C_{10}^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-4}$

$$= \frac{45}{1024} + \frac{120}{2^{10}} + \frac{210}{2^{10}} = \frac{375}{2^{10}}$$

Exo 2

1) Calculer $P(X \geq 7)$

$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ avec $p = \frac{3}{4}$, $n=8$

$P(X \geq 7) = P(X=7) + P(X=8)$

$= C_8^7 \left(\frac{3}{4}\right)\left(1-\frac{3}{4}\right) + C_8^8 \left(\frac{3}{4}\right)^8 \left(1-\frac{3}{4}\right)^0$

$= 8\left(\frac{3}{4}\right)^7 \cdot \frac{1}{4}$

$= \frac{11}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^7 = 0{,}36$

2) Calculer $E(X)$ et $V(X)$:

$E(X) = n.p = 8 \cdot \frac{3}{4} = 6$ $\quad V(X) = n.p(1-p) = 8 \cdot \frac{3}{4}\left(1-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{2}$

Exo 3 :

loi de poisson : $P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ $k = 0,3,2$

1) 300 appels $\longrightarrow$ 60 min

1 appels $\longrightarrow$ 2 min

$\lambda = \frac{300 \times 2}{60} = 10$ appels. donc $P(X=k) = e^{-10} \frac{10^k}{k!}$

$P(X=3) = e^{-10} \frac{10^3}{3!} = 7{,}56$

- au moins un appel : $P(X \geq 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(X=0) = 1 - e^{-10} \frac{10^0}{0!}$

$= 1 - e^{-10} = 0{,}99$

- au moins deux appel : $P(X \geq 2) = 1 - P(X<2)$

$= 1 - [P(X=0) + P(X=1)]$

$= 1 - e^{-10} \frac{10^0}{0!} + e^{-10} \frac{10^1}{1!}$

$= 1 - e^{-10} - 10e^{-10} \approx 0{,}99$.

Exo 4 :

400 p → 240 fautes $\quad \lambda = \frac{240}{400} = 0{,}6$

1 page → 1 fautes

donc la loi de Poisson est : $P(X=k) = e^{-0{,}6} \frac{(0{,}6)^k}{k!}$ $k = 0,1$

$P(X=0) = e^{-0,6} = 0,54$

- Calculer $P(X \leq 2)$: $P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$$= e^{-0,6} + e^{-0,6}(0,6) + e^{-0,6} \cdot \frac{(0,6)^{2}}{2!}$$

$$= 0,97.$$

- Calculer $P(X \geq 1)$: $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - e^{-0,6}\frac{(0,6)^0}{0!} = 0,46$

$P(A) = N(m, \sigma^2)$ avec $m = \lambda$ et $\sigma = \sqrt{\lambda}$

5) on peut approximer la loi de Poisson : $X \sim P(\lambda)$ par la loi de Normale $X \sim N(\quad)$ avec $m = \lambda$ et $\sigma = \sqrt{\lambda}$

Exo 5 : Loi uniforme :

$$f(x) \begin{cases} \frac{1}{6-1} & \text{si } x \in [1,6] \\ 0 & \text{si } x \notin [1,6] \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{si } x \in [1,6] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - \int_{-\infty}^{4} f(x)\,dx = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$