Exercices corrigés de probabilités et statistique

Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne

Cours de deuxième année de licence de sciences économiques

Fabrice Rossi

Table des matières

Introduction

Ce document propose des exercices corrigés illustrant le cours de probabilités et statistique. Les corrections sont abondamment commentées pour faciliter la compréhension et expliciter le raisonnement qui conduit à la bonne solution. On trouve ainsi à la suite de l'énoncé d'un exercice une série de commentaires encadrant des éléments de correction. La réponse attendue lors d'une évaluation est constituée de l'ensemble des éléments de correction, à l'exclusion, bien entendu, des commentaires.

Chapitre 1

Dénombrement et équiprobabilité

Exercice 1.1

Énoncé *On place dans un sac 5 billets de 5 €, 7 billets de 10 € et 10 billets de 20 €. On choisit au hasard une poignée de 8 billets, chaque billet ayant la même probabilité d'être attrapé.*

1. *Quelle est la probabilité de n'avoir choisi aucun billet de 5 € ?*
2. *Quelle est la probabilité d'avoir obtenu uniquement des billets de 20 € ?*
3. *Quelle est la probabilité d'avoir obtenu au moins un billet de chaque valeur ?*
4. *On recommence l'expérience en tirant les billets un par un et en remettant le billet dans le sac après son tirage. Calculer les probabilités des trois évènements ci-dessus dans cette nouvelle expérience.*

Comme dans tout exercice de probabilité qui ne fait pas intervenir de variables aléatoires, on doit commencer la résolution par la définition de l'**univers** Ω associé à l'expérience. On rencontre ici une difficulté classique : les billets d'une catégorie ne sont pas (facilement) discernables. On pourrait donc être tenté de tenir compte de ce fait dans Ω : c'est en général une **mauvaise idée**. On suppose donc les billets discernables (numérotés, par exemple).

Correction

On suppose les billets discernables. On appelle $c_1, \ldots, c_5$ les 5 billets de 5 €, $d_1, \ldots, d_7$ les 7 billets de 10 € et $v_1, \ldots, v_{10}$ les 10 billets de 20 €. On note l'ensemble des billets B, avec

$$B = \{c_1, \ldots, c_5, d_1, \ldots, d_7, v_1, \ldots, v_{10}\}.$$

> L'univers de l'expérience aléatoire, Ω, est constitué de tous les ensembles de 8 billets distincts, soit donc
>
> $$\Omega = \{\{b_1, \ldots, b_8\} \mid \forall i,\ b_i \in B \text{ et } \forall j \neq i,\ b_i \neq b_j\}\,.$$

La définition de l'univers est ici très formelle. On peut se contenter d'une définition plus informelle, à condition de bien faire ressortir dans celle-ci deux éléments cruciaux de l'énoncé : le nombre d'éléments choisis (ici 8) et la nature du tirage. Ici, on indique qu'on tire une poignée de billets, ce qui implique qu'il n'y a pas de remise et qu'il n'y a pas d'ordre. Ceci est traduit mathématiquement par le fait qu'on considère un ensemble de billets (et pas une liste) et que les billets sont distincts. Ces deux mots clé (*ensemble* et *distinct*) doivent impérativement apparaître dans la réponse. Il faut aussi faire apparaître l'ensemble des objets dans lequel les sous-ensembles sont choisis (ici, B).

Il faut maintenant définir la **probabilité** sur Ω. Comme dans de nombreuses situations, on fait une hypothèse naturelle d'équiprobabilité, ce qui transforme le calcul d'une probabilité en celui de la taille d'un ensemble.

Correction

> Les billets étant équiprobables, on suppose que la probabilité est uniforme que Ω et donc que pour tout évènement A, sa probabilité $\mathbb{P}(A)$ est donnée par
>
> $$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$
>
> On sait que $|\Omega|$ est donné par C_{22}^{8} car il s'agit de l'ensemble des sous-ensembles de cardinal 8 de l'ensemble B qui est lui même de cardinal 22.

Notons qu'il est important de justifier brièvement le choix de la probabilité uniforme (comme c'est fait ici) et de rappeler le mode de calcul des probabilités dans cette situation.

Une fois l'expérience décrite par son univers et la probabilité associée, on peut passer aux questions proprement dites. En général, les « solutions » obtenues en s'attaquant directement aux questions sans passer par la phase de modélisation sont totalement fausses.

Correction

> Soit l'évènement $A = \{\text{n'avoir aucun billet de 5 €}\}$. Il est clair que A peut aussi s'exprimer
>
> $$A = \{\text{avoir uniquement des billets de 10 € et de 20 €}\}.$$

On cherche donc les sous-ensembles de 8 billets distincts choisis dans B', l'ensemble des 17 billets de 10 € et 20 €. On en déduit alors que $|A| = C_{17}^8$, puis que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{C_{17}^8}{C_{22}^8} = \frac{17!}{9!8!}\frac{14!8!}{22!} = \frac{17 \times 16 \times \cdots \times 10}{22 \times 21 \times \cdots \times 15} \simeq 0,076$$

Notons que le résultat attendu est simplement celui qui fait apparaître les formules explicites pour les C_n^p. La simplification du résultat et la valeur numérique approchée ne doivent pas être fournies en général.

On peut interpréter le résultat sous forme d'un tirage séquentiel. Il est clair en effet que la probabilité de tirer un unique billet qui ne soit pas de 5 € est de $\frac{17}{22}$. Si on tire ensuite un deuxième billet sans remettre le premier, il ne reste plus que 21 billets, dont seulement 16 ne sont pas de 5 €. La probabilité de ne pas tomber sur un billet de 5 € devient donc $\frac{16}{21}$, puis $\frac{15}{20}$ et ainsi de suite jusqu'à $\frac{10}{15}$ pour le huitième billet. En formalisant ce raisonnement et en s'appuyant sur la notion de probabilités conditionnelles, on peut retrouver le résultat sur $\mathbb{P}(A)$. Il est cependant *beaucoup plus simple* de déterminer la taille de A en s'appuyant sur des propriétés connues.

Notons qu'il ne faut surtout pas chercher à déterminer la composition de la poignée de billets ne contenant pas de billets de 5 € au risque de perdre beaucoup de temps. Cet exercice se différencie donc d'autres exercices dans lesquels on étudie une partie complexe de Ω en la décomposant en parties plus simples. Ici, on s'intéresse toujours à des sous-ensembles de taille huit, mais on change l'ensemble dont ils sont des parties : on passe de B tout entier (l'ensemble des 22 billets) à un sous-ensemble de B. On procède exactement de la même façon pour la question suivante.

Correction

Soit l'évènement $D = \{\text{obtenir uniquement des billets de 20 €}\}$. On cherche ainsi les sous-ensembles de taille 8 billets choisis dans l'ensemble des 10 billets de 20 €. On donc $|D| = C_{10}^8$ et

$$\mathbb{P}(D) = \frac{C_{10}^8}{C_{22}^8} = \frac{10!}{8!8!}\frac{14!8!}{22!} \simeq 1,41\,10^{-4}.$$

La troisième question se traite d'une façon assez différente car elle nécessite de réécrire l'évènement.

Correction

Soit l'évènement

$$E = \{\text{obtenir au moins un billet de chaque valeur}\}.$$

On étudie son complémentaire $F = \overline{E}$ qu'on décompose en deux sous-évènements disjoints :

$$F_1 = \{\text{obtenir des billets d'une seule valeur}\}$$
$$F_2 = \{\text{obtenir des billets de deux valeurs}\}.$$

F_1 est en fait l'évènement

$$F_1 = \{\text{obtenir uniquement des billets de 20 €}\} = D,$$

car il n'y a pas assez de billets de 5 € et de 10 € pour obtenir une poignée de 8 billets composée uniquement de l'une ou l'autre des valeurs. On sait déjà que $|F_1| = C_{10}^8$. On décompose F_2 en trois sous-ensembles disjoints :

$$G_5 = \{\text{obtenir des billets de 10 € et de 20 €, et pas de 5 €}\},$$
$$G_{10} = \{\text{obtenir des billets de 5 € et de 20 €, et pas de 10 €}\},$$
$$G_{20} = \{\text{obtenir des billets de 5 € et de 10 €, et pas de 20 €}\}.$$

On remarque que

$$G_{20} = \{\text{n'avoir aucun billet de 20 €}\}.$$

En effet, comme il y a strictement moins de 8 billets de 5 € et de 10 €, ne pas obtenir de billet de 20 € implique d'obtenir au moins un billet de 5 € et au moins un billet de 10 €. D'après le raisonnement de la première question, on a donc $|G_{20}| = C_{12}^8$.

On remarque aussi que

$$G_5 = \{\text{aucun billet de 5 €}\} \setminus \{\text{uniquement des billets de 20 €}\}.$$

D'après la question 1, $|\{\text{aucun billet de 5 €}\}| = C_{17}^8$, alors que d'après la question 2, $|\{\text{uniquement des billets de 20 €}\}| = C_{10}^8$. On a donc

$$|G_5| = C_{17}^8 - C_{10}^8.$$

Un raisonnement similaire conduit à

$$|G_{10}| = C_{15}^8 - C_{10}^8.$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned}|F| &= |F_1| + |G_5| + |G_{10}| + |G_{20}| \\ &= C_{10}^8 + C_{17}^8 - C_{10}^8 + C_{15}^8 - C_{10}^8 + C_{12}^8 \\ &= C_{17}^8 + C_{15}^8 + C_{12}^8 - C_{10}^8\end{aligned}$$

On a donc

$$\mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}(F) = 1 - \frac{C_{17}^8 + C_{15}^8 + C_{12}^8 - C_{10}^8}{C_{22}^8} \simeq 0,902.$$

Cette question est beaucoup plus complexe que les précédentes et peut conduire à des solutions fausses de façon malheureusement assez naturelle. Il est fréquent par exemple de confondre les évènements G_5 et A. Or, dans G_5, on considère les poignées qui ne contiennent pas de billet de 5 € mais qui contiennent aussi au moins un billet de 10 € et au moins un billet de 20 €. L'évènement A est moins restrictif car il demande seulement de ne pas avoir de billet de 5 €. On peut donc obtenir une poignée ne contenant que des billets de 20 €. Pour trouver $|G_5|$, on doit donc enlever de A les poignées ne contenant que des billets de 20 €.

Une autre erreur classique consiste à essayer de construire les résultats de l'expérience qui constituent l'évènement étudié. Cette stratégie fonctionne très bien dans certaines situations, mais elle est parfois délicate à mettre en œuvre. Dans la question précédente, on étudie donc des sous-ensembles de 8 billets contenant au moins un billet de chaque valeur. Pour obtenir un tel sous-ensemble, on peut donc choisir un billet de 5 € (soit 5 possibilités), un billet de 10 € (7 possibilités), un billet de 20 € (10 possibilités) et enfin 5 billets quelconques parmi les 19 billets restants (soit donc C_{19}^5 possibilités). Les choix étant indépendants, on obtient $5 \times 7 \times 10 \times C_{19}^5$ façons de construire une poignée de 8 billets.

Le problème est qu'on construit de cette façon plusieurs fois les mêmes poignées, ce qui revient à les compter plusieurs fois. Si on choisit par exemple les billets (c_1, d_1, v_1) puis la poignée $\{c_2, c_3, d_2, d_3, v_2\}$, on obtient la même poignée que si on commence par choisir (c_2, d_2, v_2) puis la poignée $\{c_1, c_3, d_1, d_3, v_1\}$. En fait $5 \times 7 \times 10 \times C_{19}^5 = 4\ 069\ 800$ alors que $C_{22}^8 = 319\ 770$: on compte donc de très nombreuses fois les mêmes poignées. Il faudrait ainsi trouver un moyen d'éviter ces constructions redondantes, ce qui est assez complexe. La meilleure solution reste alors la technique de décomposition utilisée dans la correction.

Le traitement de la question 4 nécessite l'introduction d'un nouvel univers. Comme indiqué plus haut, cette étape est indispensable pour obtenir des résultats corrects.

Correction

Le tirage étant maintenant séquentiel, on obtient une liste de billets. De plus, comme les billets sont remis dans le sac, on peut obtenir plusieurs fois le même. L'univers est donc le produit cartésien B^8, soit

$$\Omega = \{(b_1, \dots, b_8) \mid \forall i,\ b_i \in B\}.$$

Comme dans la définition du premier univers, on attend ici des expressions clé importantes : *liste* (par opposition à *ensemble* et pour tenir compte de l'ordre dans le tirage) et *plusieurs fois le même* (par opposition à *distinct* et pour traduire la remise entre chaque tirage).

On introduit ensuite la probabilité sur Ω.

Correction

> Comme dans les questions précédents, on utilise la probabilité uniforme sur Ω, ce qui demande le calcul du cardinal de cet ensemble. Comme c'est un produit cartésien, on a
>
> $$|\Omega| = |B|^8 = 22^8.$$

Le calcul des trois probabilités se fait ensuite assez facilement en utilisant les mêmes raisonnements que dans la première expérience, avec les adaptations nécessaires au mode de tirage.

Correction

> On considère l'évènement $A = \{\text{n'avoir aucun billet de 5 €}\}$. Comme pour la question 1, il s'agit de trouver les tirages ne contenant que des billets de 10 € et de 20 €. On cherche donc les listes de 8 billets choisis dans B', l'ensemble des billets de 10 € et de 20 €. On a donc clairement $|A| = |B'|^8 = 17^8$. Donc
>
> $$\mathbb{P}(A) = \frac{17^8}{22^8} \simeq 0,127.$$
>
> De même, l'évènement $D = \{\text{obtenir uniquement des billets de 20 €}\}$ se traite comme à la question : il s'agit de trouver des listes de 8 billets choisis parmi les 10 billets de 20 €. On a clairement 10^8 listes de ce type, ce qui conduit à
>
> $$\mathbb{P}(D) = \frac{10^8}{22^8} \simeq 1,82\ 10^{-3}.$$
>
> Enfin, l'évènement
>
> $$E = \{\text{obtenir au moins un billet de chaque valeur}\},$$
>
> se traite par décomposition exactement comme dans la question 3. En utilisant les mêmes notations, on cherche donc la taille de son complémentaire F en passant par F_1 et F_2. Une différence avec la question 3 est qu'on peut obtenir ici des listes de 8 billets contenant uniquement des billets de 5 €, ou uniquement des billets de 10 € car on remet les billets. On décompose donc

F_1 en trois sous-évènements disjoints :

$$\begin{aligned} H_5 &= \{\text{obtenir uniquement des billets de 5 €}\}, \\ H_{10} &= \{\text{obtenir uniquement des billets de 10 €}\}, \\ H_{20} &= \{\text{obtenir uniquement des billets de 20 €}\}. \end{aligned}$$

Dans chaque cas, on cherche des listes constituées uniquement des billets d'un catégorie, ce qui conduit à un ensemble contenant k^8 listes si on considère k billets. On a donc

$$\begin{aligned} |H_5| &= 5^8, \\ |H_{10}| &= 7^8, \\ |H_{20}| &= 10^8. \end{aligned}$$

Le calcul des cardinaux de G_5, G_{10} et G_{20} se fait selon les mêmes principes que dans la question 3 : on compte d'abord le nombre de listes ne contenant pas de billets de la valeur non souhaitée, puis on enlève au total le nombre de listes composées uniquement d'un type de billet. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} |G_5| &= \underbrace{(7+10)^8}_{\text{pas de 5 €}} - \underbrace{7^8}_{\text{uniquement des 10 €}} - \underbrace{10^8}_{\text{uniquement des 20 €}}, \\ |G_{10}| &= (5+10)^8 - 5^8 - 10^8, \\ |G_{20}| &= (5+7)^8 - 5^8 - 7^8. \end{aligned}$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned} |F| &= |H_5| + |H_{10}| + |H_{20}| + |G_5| + |G_{10}| + |G_{20}|, \\ &= 17^8 + 15^8 + 12^8 - 5^8 - 7^8 - 10^8, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}(F) = 1 - \frac{17^8 + 15^8 + 12^8 - 5^8 - 7^8 - 10^8}{22^8} \simeq 0,820.$$

Chapitre 2

Conditionnement et indépendance

Exercice 2.1

Énoncé *On considère le jeu suivant : le joueur lance d'abord un dé non truqué. Il tire ensuite un jeton dans une urne choisie en fonction du résultat du dé. L'urne A est choisie quand le dé donne 1, 2 ou 3, l'urne B quand on obtient 4 ou 5 et l'urne C quand on obtient 6. Les urnes contiennent les jetons suivants :*

urne A : deux jetons rouges, trois jetons bleus ;
urne B : deux jetons bleus, quatre jetons verts ;
urne C : un jeton vert, un jeton rouge.

1. *Quelle est la probabilité d'obtenir un jeton rouge par ce procédé ?*
2. *On obtient un jeton vert. Quelle est la probabilité que ce jeton soit issu de l'urne B ?*
3. *On obtient un jeton bleu. Quelle est la probabilité que le lancer du dé ait donné 3 ?*
4. *Quelle est la probabilité de ne pas obtenir un jeton vert, sachant que le lancer du dé a donné 3 ou 6 ?*
5. *Est-ce que l'évènement « choisir dans l'urne C »et l'évènement « obtenir un jeton rouge »sont indépendants ? Justifiez votre réponse.*

La résolution de l'exercice passe comme toujours par une première phase de modélisation dans laquelle on traduit l'énoncé sous forme d'hypothèses mathématiques.

Correction

On considère les évènements R, Bl et V qui correspondent respectivement à l'obtention d'un jeton rouge, bleu ou vert à la fin de l'expérience. On considère aussi les évènements A, B et C correspondant respectivement à l'utilisation des urnes désignées par les mêmes lettres.

Comme le dé utilisé n'est pas truqué, on suppose que la probabilité sur l'ensemble des faces du dé $\{1, \ldots, 6\}$ est uniforme. D'après l'énoncé, on a

$$\mathbb{P}(A|\{\text{le dé donne 1, 2 ou 3}\}) = 1,$$
$$\mathbb{P}(A|\{\text{le dé donne 4, 5 ou 6}\}) = 0.$$

La probabilité conditionnelle sur $\mathbb{P}(A|\{\text{le dé donne 1, 2 ou 3}\})$ est la traduction naturelle de la relation *déterministe* (c'est-à-dire non aléatoire) entre résultat du lancer de dé et le choix de l'urne. De façon générale, on traduit un énoncé de la forme « si U alors V » en $\mathbb{P}(V|U) = 1$.

Correction

Comme les évènements $\{\text{le dé donne 1, 2 ou 3}\}$ et $\{\text{le dé donne 4, 5 ou 6}\}$ sont disjoints et que leur union forme l'univers tout entier (du point de vue du lancer du dé), on peut appliquer la loi des probabilités totales. On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) =& \mathbb{P}(A|\{\text{le dé donne 1, 2 ou 3}\})\mathbb{P}(\{\text{le dé donne 1, 2 ou 3}\})\\ &+ \mathbb{P}(A|\{\text{le dé donne 4, 5 ou 6}\})\mathbb{P}(\{\text{le dé donne 4, 5 ou 6}\}).\end{aligned}$$

On a donc après simplification

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{\text{le dé donne 1, 2 ou 3}\}) = \frac{|\{1, 2, 3\}|}{|\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}|} = \frac{1}{2}.$$

De la même façon, on obtient

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3},$$
$$\mathbb{P}(C) = \frac{1}{6}.$$

On peut obtenir les probabilités des trois évènements A, B et C d'une autre façon en s'appuyant sur la notion de variable aléatoire, voir le chapitre 3. Dans tous les cas, il est indispensable de s'appuyer sur des propriétés connues et des définitions précises. Ici, on utilise la loi des probabilités totales. On commence donc par indiquer que les hypothèses de celle-ci sont remplies (évènements disjoints et dont l'union est l'univers), puis on applique la loi. On ne peut pas se contenter de donner directement le résultat de cette application.

Correction

Considérons le tirage d'un jeton dans l'urne A. L'univers correspondant Ω_A s'écrit

$$\Omega_A = \{r_1, r_2, b_1, b_2, b_3\},$$

où r_1 et r_2 sont les jetons rouges, et b_1, b_2, et b_3 les jetons bleus. Les jetons sont supposés discernables pour faciliter l'analyse. En l'absence d'hypothèse particulière sur les urnes et les jetons, on suppose que la probabilité sur Ω_A, $\mathbb{P}_A$, est uniforme. On a donc

$$\mathbb{P}_A(R) = \mathbb{P}_A(\{r_1, r_2\}) = \frac{|\{r_1, r_2\}|}{|\{r_1, r_2, b_1, b_2, b_3\}|} = \frac{2}{5}.$$

De la même façon, on trouve

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_A(Bl) &= \frac{3}{5}, \\ \mathbb{P}_A(V) &= 0. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R|A) &= \frac{2}{5}, \\ \mathbb{P}(Bl|A) &= \frac{3}{5}, \\ \mathbb{P}(V|A) &= 0. \end{aligned}$$

Un raisonnement similaire permet de calculer les autres probabilités conditionnelles comme par exemple $\mathbb{P}(Bl|B)$ que nous utiliserons pour répondre aux questions.

On note ici un passage de $\mathbb{P}_A$ à $\mathbb{P}(.|A)$: il s'agit de l'utilisation directe de la notion de probabilité conditionnelle. Quand on travaille dans l'urne A, on fait implicitement l'hypothèse que l'évènement A a eu lieu. Toute l'analyse conduite sur l'urne A, en particulier son univers Ω_A et la probabilité associée $\mathbb{P}_A$, n'est donc valide que conditionnellement à l'évènement A. Les probabilités qu'on obtient sont donc des probabilités conditionnelles.

La modélisation étant terminée, on peut passer à la résolution des questions.

Correction

Pour obtenir la probabilité de R (obtention d'un jeton rouge), on utilise d'abord la loi des probabilités totales relativement aux évènements A, B et C. En effet, ces trois évènements sont disjoints et leur union forme l'univers tout entier (puisqu'on choisit toujours une urne). On a donc

$$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(R|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(R|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(R|C)\mathbb{P}(C).$$

Il nous reste à calculer $\mathbb{P}(R|B)$ et $\mathbb{P}(R|C)$. Or l'urne B ne contient pas de jeton rouge, ce qui donne $\mathbb{P}(R|B) = 0$. En appliquant le même raisonnement que celui appliqué à l'urne A, on obtient que $\mathbb{P}(R|C) = \frac{1}{2}$, car il y a deux jetons dans l'urne C dont un seul est rouge. On a donc

$$\mathbb{P}(R) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{17}{60}.$$

Comme dans la phase d'analyse, il est indispensable de bien s'appuyer sur des propriétés connues des probabilités. En fait, c'est encore plus crucial ici que dans le calcul de $\mathbb{P}(A)$ par exemple. En effet, le recours aux probabilités conditionnelles dans le calcul des probabilités des trois urnes est très rigoureux, mais on peut accepter une solution plus intuitive qui consiste simplement à traduire l'évènement A en un évènement correspondant pour le lancer du dé. On peut dire en effet que

$$\{\text{obtenir l'urne } A\} = \{\text{le dé donne 1, 2 ou 3}\},$$

puis calculer $\mathbb{P}(A)$ par simple dénombrement. Ce type de raisonnement n'est pas applicable pour la question 1 qui nécessite au contraire l'utilisation de la loi des probabilités totales.

Correction

On cherche donc à calculer $\mathbb{P}(B|V)$. On applique la règle de Bayes qui donne

$$\mathbb{P}(B|V) = \frac{\mathbb{P}(V|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(V)}.$$

En appliquant toujours le même raisonnement, on voit que $\mathbb{P}(V|B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ car l'urne B contient 6 jetons dont 4 sont verts. Pour calculer enfin $\mathbb{P}(V)$, on applique de nouveau la loi des probabilités totales qui donne

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(V|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(V|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(V|C)\mathbb{P}(C).$$

Comme l'urne A ne contient pas de jeton vert, on a $\mathbb{P}(V|A) = 0$. On a aussi $\mathbb{P}(V|C) = \frac{1}{2}$ car l'urne C contient 2 jetons dont un est vert. On a donc

$$\mathbb{P}(V) = 0 \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{11}{36},$$

ce qui conduit à

$$\mathbb{P}(B|V) = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}}{\frac{11}{36}} = \frac{8}{11}.$$

On note deux points importants dans la solution. Il faut d'abord traduire correctement l'énoncé : ici on sait que V a eu lieu puisqu'on a obtenu un jeton vert. On demande alors la probabilité de B, ce qui sous-entend qu'on cherche la probabilité *conditionnelle* de cet évènement ou, en d'autres termes, qu'on cherche la probabilité de B sachant que V a eu lieu. On doit donc calculer $\mathbb{P}(B|V)$.

Cette grandeur étant inconnue, on utilise l'outil classique pour se ramener à des grandeurs connues, à savoir la règle de Bayes (il faut impérativement rappeler le nom de cette règle pour l'utiliser). Elle permet en effet de « renverser » le conditionnement : on passe ici de $\mathbb{P}(B|V)$ à $\mathbb{P}(V|B)$. Or, cette deuxième grandeur est connue puisqu'elle se déduit du protocole suivi dans l'expérience.

La question suivante se traite exactement de la même manière : on utilise la règle de Bayes et la loi des probabilités totales pour calculer les probabilités conditionnelles recherchées.

Correction

On cherche à calculer $\mathbb{P}(\{\text{le dé donne } 3\}|Bl)$. En notant $\{3\}$ l'évènement sur le dé, la règle de Bayes donne

$$\mathbb{P}(\{3\}|Bl) = \frac{\mathbb{P}(Bl|\{3\})\mathbb{P}(\{3\})}{\mathbb{P}(Bl)}.$$

En appliquant à $\{3\}$ le même raisonnement qu'à A, on a

$$\mathbb{P}(Bl|\{3\}) = \frac{3}{5},$$

car l'évènement $\{3\}$ conduit à un tirage d'un jeton dans l'urne A qui en contient 5 donc 3 sont bleus. D'autre part, comme le dé n'est pas truqué, on a $\mathbb{P}(\{3\}) = \frac{1}{6}$. Enfin, on calcule $\mathbb{P}(Bl)$ par l'intermédiaire de la loi des probabilités totales, ce qui donne

$$\mathbb{P}(Bl) = \mathbb{P}(Bl|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(Bl|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(Bl|C)\mathbb{P}(C).$$

Or, $\mathbb{P}(Bl|C) = 0$ car l'urne C ne contient pas de jeton bleu, et $\mathbb{P}(Bl|C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ car l'urne B contient 6 jetons donc 2 bleus. On a donc

$$\mathbb{P}(Bl) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{6} = \frac{37}{90},$$

ce qui conduit à

$$\mathbb{P}(\{3\}|Bl) = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{1}{6}}{\frac{37}{90}} = \frac{9}{37}.$$

L'étude d'un évènement sur le dé plutôt que sur l'urne demande un peu d'attention : il faut en effet justifier que $\mathbb{P}(Bl|\{3\}) = \mathbb{P}(Bl|A)$ ce qui se fait simplement en indiquant qu'on raisonne de la même façon dans les deux cas.

On sait en effet que l'obtention d'un 3 conduit à utiliser l'urne A et donc aux probabilités conditionnelles déjà calculées. Il faut simplement bien faire attention de considérer $\mathbb{P}(Bl|\{3\})$ dans les calculs, et pas $\mathbb{P}(Bl|A)$, pour éviter toute confusion.

La question suivante est un peu plus subtile. Elle est destinée à tester les connaissance sur les probabilités conditionnelles. En effet, si U et V sont deux évènements disjoints, on pourrait croire que pour un autre évènement W, $\mathbb{P}(W|U \text{ ou } V)$ est égal à la somme de $\mathbb{P}(W|U)$ et $\mathbb{P}(W|V)$, ce qui est faux en général. En revanche, comme une probabilité conditionnelle est une probabilité, on a bien

$$\mathbb{P}(U \text{ ou } V|W) = \mathbb{P}(U|W) + \mathbb{P}(U|V),$$

quand U et V sont disjoints. En utilisant la règle de Bayes ou la définition des probabilités conditionnelles, on peut donc calculer $\mathbb{P}(W|U \text{ ou } V)$, mais c'est un peu plus complexe qu'on pourrait le croire de prime abord.

Correction

On cherche donc $\mathbb{P}(\overline{V}|D)$ avec

$$D = \{\text{le dé a donné 3 ou 6}\}.$$

En utilisant le fait que $\mathbb{P}(\overline{V}|D) = 1 - \mathbb{P}(V|D)$, on se ramène au calcul de $\mathbb{P}(V|D)$. Or, par définition des probabilités conditionnelles, on a

$$\mathbb{P}(V|D) = \frac{\mathbb{P}(V \cap D)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{\mathbb{P}(V \cap \{3\}) + \mathbb{P}(V \cap \{6\})}{\mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{6\})},$$

la deuxième égalité provenant du fait que D est l'union disjointe des deux évènements $\{3\}$ et $\{6\}$ (qui désignent respectivement l'obtention d'un 3 et d'un 6).

On sait que $\mathbb{P}(V \cap \{3\}) = 0$ puisque l'obtention d'un 3 conduit à utiliser l'urne A qui ne contient pas de jeton vert. D'autre part, en appliquant de nouveau la définition des probabilités conditionnelles, on a

$$\mathbb{P}(V \cap \{6\}) = \mathbb{P}(V|\{6\})\mathbb{P}(\{6\}).$$

Or, l'obtention d'un 6 conduit à utiliser l'urne C et donc à choisir un jeton parmi deux jetons (dont un est vert). On a donc $\mathbb{P}(V|\{6\}) = \frac{1}{2}$. On en déduit donc

$$\mathbb{P}(V|D) = \frac{0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = \frac{1}{4},$$

et donc finalement que $\mathbb{P}(\overline{V}|D) = \frac{3}{4}$.

La dernière question est essentiellement une question de cours.

Correction

Deux évènements U et V sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(U \cap V) = \mathbb{P}(U)\mathbb{P}(V)$. On considère donc l'évènement $C \cap R$. Par définition des probabilités conditionnelles, on a

$$\mathbb{P}(C \cap R) = \mathbb{P}(R|C)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}.$$

Or, d'après la question 1, $\mathbb{P}(R) = \frac{17}{60}$, donc

$$\mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}(C) = \frac{17}{60} \times \frac{1}{6} \neq \mathbb{P}(C \cap R).$$

De ce fait, les deux évènements considérés ne sont pas indépendants.

Chapitre 3

Variables aléatoires discrètes

Exercice 3.1

Énoncé *On considère le jeu suivant : le joueur lance d'abord un dé non truqué. S'il obtient* 1, 2 *ou* 3, *il gagne l'équivalent en euros (c'est-à-dire 1 € s'il obtient* 1, *par exemple). Sinon, il perd 2 €. On note X la variable aléatoire correspondant au gain du joueur (négatif en cas de perte).*

1. *Donnez la loi de X et sa fonction de répartition F_X.*
2. *Calculez l'espérance de X.*
3. *Calculez la variance de X.*

On modifie le jeu de la façon suivante : les gains restent les mêmes pour les résultats 1, 2 *ou* 3, *mais si le joueur obtient autre chose, il relance le dé. S'il obtient* 3 *ou moins, il gagne 3 €, sinon il perd 5 €.*

1. *Décrivez formellement l'univers du nouveau jeu.*
2. *Donnez la loi de Y (qui désigne de nouveau le gain du joueur) et calculez son espérance.*
3. *Quelle variante du jeu est la plus avantageuse pour le joueur ?*

Quand une variable aléatoire est définie de façon explicite, il est important de bien définir l'univers de l'expérience aléatoire de départ afin d'éviter toute confusion. Cela sera particulièrement important dans la deuxième partie de l'exercice.

Correction

L'expérience aléatoire est un lancer de dé dont l'univers est donc

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

muni d'une probabilité uniforme (car le dé n'est pas truqué). La variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

ω	1	2	3	4	5	6
$X(\omega)$	1	2	3	-2	-2	-2

On en déduit donc que $X(\Omega) = \{-2, 1, 2, 3\}$. La loi de X est donnée par $\mathbb{P}(\{X(\omega) = x\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(\{x\}))$ pour les $x \in X(\Omega)$. En utilisant le fait que la probabilité $\mathbb{P}$ est uniforme, on obtient les résultats résumés dans le tableau suivant, dont la dernière ligne donne la loi de X :

x	-2	1	2	3
$X^{-1}(\{x\})$	$\{4, 5, 6\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$
$\mathbb{P}_X(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Une fois la loi de X déterminée, les questions suivantes sont essentiellement des questions de cours, associées à la réalisation de quelques calculs.

Correction

La fonction de répartition F_X définie par $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ est alors

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -2, \\ \frac{1}{2} & \text{pour } -2 \leq x < 1, \\ \frac{2}{3} & \text{pour } 1 \leq x < 2, \\ \frac{5}{6} & \text{pour } 2 \leq x < 3, \\ 1 & \text{pour } x \geq 3. \end{cases}$$

Pour calculer $\mathbb{E}(X)$, on applique la définition de l'espérance, à savoir

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}_X(x).$$

On obtient ainsi

$$\mathbb{E}(X) = -2 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} = 0.$$

Pour calculer $V(X)$, on utilise $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$. On a

$$\mathbb{E}(X^2) = (-2)^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{6} = \frac{13}{3},$$

et donc $V(X) = \frac{13}{3} \simeq 4{,}33$.

Pour le calcul de la variance, il est rare que le passage par la formule de définition, c'est-à-dire

$$V(X) = \mathbb{E}\left\{(X - \mathbb{E}(X))^2\right\},$$

soit très pratique. En général, il vaut mieux passer par la formule utilisée ci-dessus. Dans le calcul de $\mathbb{E}(X^2)$, deux erreurs classiques sont à éviter. On doit tout d'abord mettre au carré les valeurs prises par X, pas les probabilités de ces valeurs. De plus, il faut être attentif au signe de ces valeurs : dans le calcul ci-dessus, on a bien $(-2)^2 = 4$ et non pas $-(2^2) = -4$, ce qui donnerait un résultat complètement faux.

La deuxième partie de l'exercice est plus délicate car l'expérience ne semple pas symétrique. La solution la plus simple pour l'analyser est de faire comme si elle était symétrique : on considère deux lancers de dé, le deuxième étant inutile pour la définition de Y dans certaines situations. Cette approche s'apparente à celle utilisée pour faciliter le traitement de certains problèmes dans lesquels on fait comme si les objets étudiés (des jetons par exemple) étaient discernables alors qu'ils ne le sont pas.

Correction

On choisit comme univers celui d'une expérience dans laquelle on lance toujours deux fois le dé. On a donc

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\},$$

muni de la probabilité uniforme.

La variable aléatoire Y est alors donnée par le tableau suivant en fonction du résultat de l'expérience $\omega = (u,v)$:

(u,v)	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3
4	3	3	3	-5	-5	-5
5	3	3	3	-5	-5	-5
6	3	3	3	-5	-5	-5

On constate que $Y(\Omega) = \{-5,1,2,3\}$. Pour tout $y \in Y(\Omega)$, on doit déterminer $Y^{-1}(\{y\})$ pour calculer la probabilité de cet évènement et ainsi la loi de Y. D'après le tableau, on a

$$\begin{aligned}
Y^{-1}(\{-5\}) &= \{4,5,6\} \times \{4,5,6\},\\
Y^{-1}(\{1\}) &= \{1\} \times \{1,2,3,4,5,6\},\\
Y^{-1}(\{2\}) &= \{2\} \times \{1,2,3,4,5,6\},\\
Y^{-1}(\{3\}) &= (\{3\} \times \{1,2,3,4,5,6\}) \cup (\{4,5,6\} \times \{1,2,3\}).
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que la probabilité sur Ω est uniforme, on obtient le tableau suivant qui résume la loi de Y :

y	-5	1	2	3
$\mathbb{P}_Y(y)$	$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	$\frac{6}{36} + \frac{9}{36} = \frac{5}{12}$

Comme dans la première partie de l'exercice, une fois la loi de Y déterminée, le reste n'est que calcul...

Correction

On a
$$\mathbb{E}(Y) = -5 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{5}{12} = \frac{1}{2}.$$
Comme $\mathbb{E}(Y) > \mathbb{E}(X)$, on gagne en moyenne plus à la deuxième variante qui est donc plus avantageuse pour le joueur.

Chapitre 4

Lois discrètes classiques

Exercice 4.1

Énoncé *Pour améliorer la sûreté de fonctionnement d'un serveur informatique, on envisage d'introduire de la redondance, c'est-à-dire d'avoir plusieurs exemplaires des composants importants. On peut réaliser les opérations suivantes :*

- *on utilise trois alimentations de 300 Watts chacune : le serveur peut continuer à fonctionner avec une alimentation en panne car il consomme au maximum 500 Watts.*
- *on place les quatre disques durs en configuration RAID 5 : le serveur peut continuer à fonctionner avec un disque dur en panne.*

On suppose que la probabilité de panne d'une alimentation est p et que celle d'une panne de disque dur est q. On suppose en outre que tous les composants sont indépendants.

1. *Soit un serveur avec alimentations redondantes : calculer la probabilité de panne du serveur en supposant qu'aucun autre composant que les alimentations ne peut tomber en panne.*
2. *Soit un serveur avec disques durs RAID 5 : calculer la probabilité de panne du serveur en supposant qu'aucun autre composant que les disques dur ne peut tomber en panne.*
3. *Si $p = q$, quelle solution de redondance est la plus intéressante ?*

Cet exercice consiste avant tout en la modélisation d'un problème réel au moyen d'outils probabilistes classiques. Il faut donc reconnaître dans l'énoncé les hypothèses qui permettent de se ramener à des modèles connus.

Correction

> Comme un composant possède ici deux états (en panne ou pas), on considère cet état comme une variable de Bernoulli, l'état de panne correspondant au « succès » de la variable.

> Donc, l'état de l'alimentation i est représenté par une variable A_i distribuée selon $B(p)$ une variable aléatoire Bernoulli qui vaut 1 si l'alimentation est en panne.

Cette modélisation est très fréquente et très classique. À chaque fois qu'on rencontre une grandeur aléatoire qui peut prendre deux valeurs, on est en fait en présence d'une variable de Bernoulli. La valeur à représenter par 1 dépend de ce qu'on veut faire dans la suite. Ici, on doit compter le nombre de composants en panne pour savoir si l'ordinateur continue de fonctionner. Il est donc naturel de représenter par 1 la panne plutôt que le bon fonctionnement.

Correction

> L'alimentation globale est constituée de trois alimentations A_1, A_2 et A_3. Comme les alimentations sont des variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p, le nombre d'alimentation en panne, qui est la somme $A_1 + A_2 + A_3$ est une variable de loi Binomiale $B(3, p)$.

De nouveau, nous utilisons ici une modélisation très classique. Pour justifier l'utilisation d'une loi Binomiale, il faut rappeler les propriétés importantes suivantes : on compte les succès de variables de Bernoulli *indépendantes* et de *même paramètre*. Si les variables ne sont pas indépendantes ou si elles ont des paramètres différents, le résultat n'est pas une loi Binomiale. Notons aussi que compter les succès ou faire la somme des variables est exactement la même chose et qu'on peut donc utiliser la justification la plus adaptée au contexte.

Correction

> Le serveur est en panne si deux au moins des alimentations sont en panne. On note A l'évènement « panne de l'alimentation globale ». On a donc
>
> $$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A_1 + A_2 + A_3 \geq 2),\\ &= \mathbb{P}(A_1 + A_2 + A_3 = 2) + \mathbb{P}(A_1 + A_2 + A_3 = 3),\\ &= C_3^2 p^2(1-p) + C_3^3 p^3,\\ &= p^2(3-2p),\end{aligned}$$
>
> en utilisant les propriétés de la loi Binomiale.

La deuxième question est exactement la même que la première mais avec des paramètres numériques légèrement différents...

Correction

> Comme pour les alimentations, on modélise les disques durs par des variables D_j de Bernoulli $B(q)$, indépendantes. Le nombre de disques en

panne est alors une variable de loi Binomiale $B(4,q)$. Le serveur est en panne si au moins deux des disques sont en panne, l'évènement correspondant D étant de probabilité

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{4} D_j \geq 2\right), \\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{4} D_j = 2\right) + \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{4} D_j = 3\right) + \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{4} D_j = 4\right) \\
&= C_4^2 q^2(1-q)^2 + C_4^3 q^3(1-q) + C_4^4 q^4, \\
&= q^2(6(1-q)^2 + 4q(1-q) + q^2), \\
&= q^2(3q^2 - 8q + 6).
\end{aligned}$$

Pour choisir la meilleure solution, on compare les probabilités de panne en supposant que $p = q$. On a ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(D) &= p^2(3-2p) - p^2(3p^2 - 8p + 6), \\
&= p^2(-3p^2 + 6p - 3).
\end{aligned}$$

Le signe de cette différence est alors celui de $f(p) = -3p^2 + 6p - 3$. La dérivée de f est $f'(p) = 6(1-p)$ qui s'annule en $p = 1$ et qui est donc positive sur l'intervalle $[0,1]$. La fonction est donc croissante sur cet intervalle. Or, $f(1) = 0$ (et $f(0) = -3$. Donc, sur l'intervalle $[0,1]$, $f(p) \leq 0$. La probabilité de défaillance des alimentations est donc toujours inférieure à celle des disques durs et il est donc plus intéressante d'utiliser une redondance sur les alimentations.

On pourrait considérer que l'approche choisie pour évaluer l'intérêt de la redondance est un peu naïve. En effet, un ordinateur classique comprend nécessairement une alimentation et un stockage pérenne de type disque dur. De ce fait, on devrait normalement étudier l'ordinateur comme un ensemble comportant un sous-système redondant (par exemple les disques durs) et un sous-système non redondant (ici l'alimentation), puis calculer la probabilité de panne et comparer les deux solutions.

Il s'avère en fait que l'approche proposée dans l'exercice donne un résultat identique à celui de l'approche plus complexe. Considérons le cas d'un ordinateur avec une alimentation redondante et un unique disque dur. On s'intéresse à l'évènement « l'ordinateur ne tombe pas en panne », ce qui s'écrit $\overline{A} \cap \overline{D}$ avec les notations de la correction. En supposant les sous-systèmes indépendants, on a

$$\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{D}) = \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(\overline{D}) = (1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(D)).$$

En utilisant les résultats de la correction pour A et les hypothèses pour D, on a donc

$$\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{D}) = (1 - p^2(3 - 2p))(1 - q).$$

Un raisonnement similaire conduit la probabilité suivant dans le cas d'un serveur aux disques durs redondants et à l'alimentation unique :

$$\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{D}) = (1 - p)(1 - q^2(3q^2 - 8q + 6)).$$

Si on suppose maintenant que $p = q$, on voit apparaître dans les deux expressions un facteur $(1 - p)$ commun qu'on peut donc supprimer dans l'analyse. On se retrouve ainsi à comparer $\mathbb{P}(\overline{A})$ et $\mathbb{P}(\overline{D})$ dans le cas de redondance pour les deux sous-systèmes. Or, il s'agit de la comparaison des probabilités des complémentaires des évènements étudiés dans la correction. On obtient donc exactement les mêmes conclusion que dans cette correction : il est plus intéressant de rendre les alimentations redondantes.

Exercice 4.2

Énoncé *Un magasin spécialisé reçoit en moyenne 4 clients par jour, le nombre de clients étant distribué selon une loi de Poisson. Calculer la probabilité que le magasin soit visité le mercredi par :*

1. *aucun client ;*
2. *5 clients ;*
3. *au moins 6 clients.*

Correction

> On note C la variable aléatoire donnant le nombre de clients reçus par jour dans le magasin. Par hypothèse, C est distribuée selon une loi de Poisson de paramètre λ et telle que $\mathbb{E}(C) = 4$. Or, on sait que si $C \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\mathbb{E}(C) = \lambda$, donc $\lambda = 4$.

La phase de modélisation traditionnelle consiste ici à traduire les hypothèses de l'énoncé exprimées en français en hypothèses mathématiques. Ici, l'énoncé fait une hypothèse indirecte sur le paramètre de la loi de Poisson en indiquant l'espérance de la variable. Une simple phrase de justification permet de transformer cette hypothèse sur l'espérance en une hypothèse sur la valeur de λ. Le reste l'exercice est alors très simple et consiste essentiellement en une application des propriétés élémentaires de la loi de Poisson.

Correction

Comme $C \sim \mathcal{P}(4)$, on a

$$\mathbb{P}(C=0) = e^{-4}\frac{4^0}{0!} = e^{-4} \simeq 0.0183.$$

En appliquant de nouveau la formule de la loi de Poisson, on a

$$\mathbb{P}(C=5) = e^{-4}\frac{4^5}{5!} \simeq 0.156.$$

Enfin, pour calculer $\mathbb{P}(C \geq 6)$, on note que

$$\overline{\{C \geq 6\}} = \{C \leq 5\} = \bigcup_{k=0}^{5}\{C=k\},$$

car C prend seulement des valeurs entières. On a donc

$$\mathbb{P}(C \geq 6) = 1 - \sum_{k=0}^{5}\mathbb{P}(C=k) = 1 - e^{-4}\sum_{k=0}^{5}\frac{4^k}{k!} \simeq 0.215.$$

Seule la dernière question demande un peu de réflexion, puisqu'il faut écrire l'évènement $\{C \geq 6\}$ en terme d'évènements de la forme $\{C=k\}$ qui sont les seuls dont on connaît les probabilités (grâce à la loi de la variable C). Comme la variable aléatoire est discrète, un évènement de la forme $\{C \in A\}$ s'écrit sous forme de l'union disjointe des évènements $\{C=a\}$ pour toutes les valeurs $a \in A$. Pour éviter d'avoir à écrire une somme infinie pour $\{C \geq 6\}$, on utilise le complémentaire de cet évènement, ce qui donne la correction proposée.

Chapitre 5

Lois continues classiques

Exercice 5.1

Énoncé *On remplit un verre de volume 20 cl d'une quantité aléatoire d'eau choisie uniformément entre 0 et 20 cl :*

1. *quelle est la probabilité d'obtenir moins de 5 cl d'eau ?*
2. *on vide 5 verres ainsi remplis dans une très grande bassine. Quelle quantité moyenne d'eau obtient-on dans la bassine ?*

Correction

Soit V la variable aléatoire correspondant à la quantité d'eau dans un verre. Par hypothèse, V suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 20]$.

La seule difficulté de modélisation est de bien comprendre qu'on travaille ici avec une variable aléatoire continue et pas avec une variable discrète. En effet, il n'y a pas de raison de supposer que la quantité d'eau est nécessairement un entier, par exemple.

Correction

On cherche $\mathbb{P}(V \leq 5)$. Par définition de la fonction de répartition, on a $\mathbb{P}(V \leq 5) = F_V(5)$. Or, pour une variable uniforme sur $[0, 20]$, on a

$$F_V(5) = \frac{5-0}{20-0} = \frac{1}{4},$$

qui est donc la probabilité recherchée.

Quand on vide 5 verres remplis aléatoirement, $V_1, \ldots, V_5$, on obtient la quantité aléatoire $V_1 + \cdots + V_5$. Par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}(V_1 + \cdots + V_5) = \mathbb{E}(V1) + \cdots + \mathbb{E}(V_5).$$

Les variables étant toutes uniformes sur $[0,20]$, elles sont toutes d'espérance $\frac{0+20}{2} = 10$. La quantité moyenne d'eau obtenue dans la bassine est de donc $5 \times 10 = 50$ cl.

Il est important de rappeler la propriété utilisée ici pour calculer la quantité moyenne d'eau, à savoir la linéarité de l'espérance. On note en particulier que cette propriété ne nécessite pas l'indépendance entre les variables aléatoires.

Exercice 5.2

Énoncé *On suppose que la durée de vie d'un disque dur est distribuée selon une loi exponentielle. Le fabricant veut garantir que le disque dur a une probabilité inférieure à* 0.001 *de tomber en panne sur un an. Quelle durée de vie moyenne minimale doit avoir le disque dur ?*

Correction

On appelle D la variable aléatoire donnant la durée de vie du disque dur. D suit une loi exponentielle de paramètre λ. Le fabricant veut garantir que

$$\mathbb{P}(D \leq 1) \leq 0.001.$$

Comme $\mathbb{P}(D \leq a) = F_D(a)$ par définition, on obtient l'inégalité

$$1 - \exp(-\lambda \times 1) \leq 0.001,$$

en appliquant la formule classique pour la fonction de répartition d'une variable de loi exponentielle. On a alors

$$\begin{aligned}
1 - \exp(-\lambda) &\leq 0.001, \\
0.999 &\leq \exp(-\lambda), \\
\ln(0.999) &\leq -\lambda, && \text{en utilisant la croissance de ln} \\
\lambda &\leq -\ln(0.999), \\
\frac{-1}{\ln(0.999)} &\leq \frac{1}{\lambda}, && \text{en utilisant la décroissance de } \frac{1}{x} \\
999{,}5 &\leq \frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Or, comme D suit une loi exponentielle, son espérance est $\frac{1}{\lambda}$. La durée de vie moyenne du disque dur doit donc être d'au moins 999,5 ans !

Cet exercice est une simple application des propriétés de la loi exponentielle et de la définition de la fonction de répartition. Il faut simplement être attentif dans la manipulation des inégalités pour bien obtenir une minoration de l'espérance et donc de la durée de vie.

Exercice 5.3

Énoncé *D'après une étude récente, la taille des femmes françaises est distribuée selon une loi normale de moyenne* $m = 1{,}58$ *et d'écart-type* $\sigma = 0{,}06$*. Pour produire un stock de vêtements, un fabricant souhaite utiliser cette loi.*

1. *Il commence par déterminer un intervalle de la forme* $[m - a, m + a]$ *(donc symétrique autour de la moyenne) contenant en moyenne 90 % (environ) des tailles des femmes françaises : calculer* a*.*
2. *Il en déduit trois tailles, S, M et L, correspondant respectivement aux intervalles* $[m - a, m - a/3]$*,* $[m - a/3, m + a/3]$ *et* $[m + a/3, m + a]$*. Calculer le pourcentage de la production qui doit être affecté à chaque taille.*

Correction

> Soit T la variable aléatoire représentant la taille d'une femme. Par hypothèse, T suit une loi normale $\mathcal{N}(1{,}58; 0{,}06^2)$. On cherche $a > 0$ tel que
>
> $$\mathbb{P}(T \in [m - a, m + a]) = 0{,}9.$$

Dans cet exercice, il n'y pas d'étape de modélisation car la loi de la variable d'intérêt est donnée explicitement, avec la valeur de ses paramètres. La traduction de l'énoncé se limite donc à exprimer mathématiquement l'évènement étudié et à donner les hypothèses sur cet évènement.

Correction

> Soit la variable $Y = \frac{T-m}{\sigma}$. On sait que Y suit une loi normale standard $\mathcal{N}(0; 1^2)$. De plus, on a
>
> $$\begin{aligned} m - a \leq {}& T && \leq m + a, \\ -a \leq {}& T - m && \leq a, \\ -\frac{a}{\sigma} \leq {}& \frac{T - m}{\sigma} && \leq \frac{a}{\sigma}. \end{aligned}$$
>
> Donc $\mathbb{P}(T \in [m - a, m + a]) = 0{,}9$ est équivalent a $\mathbb{P}(Y \in [-\frac{a}{\sigma}, \frac{a}{\sigma}]) = 0{,}9$. Cherchons donc λ tel que $\mathbb{P}(Y \in [-\lambda, \lambda]) = 0{,}9$.

On utilise ci-dessus la manipulation classique permettant de se ramener à une variable aléatoire distribuée selon une loi normale standard pour laquelle on dispose d'une table. La technique consiste à appliquer à l'évènement défini sur la variable d'origine (ici T) les transformations qui conduisent à la variable centrée et réduite (ici Y). On transforme ainsi l'évènement sur T en un évènement sur Y pour lequel on pourra appliquer la table.

Correction

> On sait que
>
> $$\mathbb{P}(Y \in [-\lambda, \lambda]) = F_Y(\lambda) - F_Y(-\lambda),$$
>
> car Y est une variable aléatoire continue. De plus, par symétrie de la loi normale standard, on $F_Y(-\lambda) = 1 - F_Y(\lambda)$, et ainsi
>
> $$\mathbb{P}(Y \in [-\lambda, \lambda]) = 2F_Y(\lambda) - 1.$$
>
> De ce fait, chercher λ tel que $\mathbb{P}(Y \in [-\lambda, \lambda]) = 0{,}9$ est équivalent à chercher λ tel que $F_Y(\lambda) = \frac{1+0{,}9}{2} = 0{,}95$.

La table ne donne que la fonction de répartition de la loi normale. Il faut donc se ramener à une équation portant sur cette fonction. On utilise d'abord le fait que pour toute variable aléatoire continue (c'est faux pour une variable discrète), on a

$$\mathbb{P}(X \in [a, b]) = F_X(b) - F_X(a).$$

Ensuite, on applique la propriété de symétrie de la loi normale pour se débarrasser du terme négatif (le terme $F_Y(-\lambda)$).

Correction

> La lecture de la table de la loi normale donne :
>
> $$F_Y(1{,}64) = 0{,}9495,$$
> $$F_Y(1{,}65) = 0{,}9505.$$
>
> Pour avoir un intervalle légèrement plus grand que celui recherché par le fabricant, on choisit $\lambda = 1{,}65$. Si on pose $a = \sigma\lambda = 0{,}06 \times 1{,}65 = 0{,}099$, on a donc
>
> $$\mathbb{P}(T \in [m - a, m + a]) = \mathbb{P}(T \in [1{,}481; 1{,}679]) \simeq 0{,}9$$

Il faut être attentif à l'inversion de la relation dans le calcul final de a. On a en effet trouvé λ grâce à la table, mais ce n'est pas la grandeur recherchée puisque l'évènement étudié est $Y \in [-\frac{a}{\sigma}, \frac{a}{\sigma}]$ alors qu'on ajusté la probabilité de $Y \in [-\lambda, \lambda]$. On doit donc faire $\frac{a}{\sigma} = \lambda$, ce qui donne a.

Le reste de l'exercice est une application de la même stratégie de centrage et de réduction de T, mais avec une utilisation « inverse » de la table : l'évènement étudié est fixé et on doit calculer sa probabilité. On a intérêt à conserver la formule $a = \sigma\lambda$ pour simplifier les calculs.

Correction

Étudions le premier intervalle. On a

$$\begin{aligned}
m-a \leq{} & \quad T && \leq m-\tfrac{a}{3},\\
-a \leq{} & \quad T-m && \leq -\tfrac{a}{3},\\
-\frac{a}{\sigma} \leq{} & \quad \frac{T-m}{\sigma} && \leq \frac{a}{3\sigma},\\
-\lambda \leq{} & \quad Y && \leq -\frac{\lambda}{3},
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(T \in \left[m-a, m-\frac{a}{3}\right]\right) &= \mathbb{P}\left(Y \in \left[-\lambda, -\frac{\lambda}{3}\right]\right),\\
&= F_Y\left(-\frac{\lambda}{3}\right) - F_Y(-\lambda),\\
&= 1 - F_Y\left(\frac{\lambda}{3}\right) - 1 + F_Y(\lambda), && \text{par symétrie}\\
&= 0{,}9505 - F_Y\left(\frac{1{,}65}{3}\right), && \text{selon l'analyse précédente}\\
&= 0{,}9505 - 0{,}7088, && \text{par lecture dans la table}\\
&= 0{,}2417.
\end{aligned}$$

On a de la même façon

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(T \in \left[m-\frac{a}{3}, m+\frac{a}{3}\right]\right) &= \mathbb{P}\left(Y \in \left[-\frac{\lambda}{3}, \frac{\lambda}{3}\right]\right),\\
&= F_Y\left(\frac{\lambda}{3}\right) - F_Y\left(-\frac{\lambda}{3}\right),\\
&= 2F_Y\left(\frac{\lambda}{3}\right) - 1,\\
&= 2 \times 0{,}7088 - 1,\\
&= 0{,}4176.
\end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(T \in \left[m+\frac{a}{3}, m+a\right]\right) &= \mathbb{P}\left(Y \in \left[\frac{\lambda}{3}, \lambda\right]\right),\\
&= F_Y(\lambda) - F_Y\left(\frac{\lambda}{3}\right),\\
&= 0{,}9505 - 0{,}7088,\\
&= 0{,}2417,
\end{aligned}$$

ce dernier résultat étant évident par symétrie de la loi normale autour de sa moyenne.

On calcule enfin les pourcentages à partir de ces probabilités. La production totale correspond à 90% de la population et on doit donc diviser les probabilités obtenues par cette valeur. On obtient alors

$$\begin{array}{rcl} \%\text{ de S} & = \frac{0{,}2417}{0{,}90} & \simeq 27\% \\ \%\text{ de M} & = \frac{0{,}4176}{0{,}90} & \simeq 46\% \\ \%\text{ de L} & = \frac{0{,}2417}{0{,}90} & \simeq 27\% \end{array}$$

L'exercice se termine par un piège classique : comme le fabricant se contente de cibler 90 % de la population, les probabilités d'obtenir les différentes tailles ne donnent pas directement les pourcentages de la production. On doit passer par un ratio pour obtenir ces pourcentages.

Chapitre 6

Variable fonction d'une autre variable

Exercice 6.1

Énoncé *On suppose que la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'ensemble*

$$X(\Omega) = \{-3, -2, 1, 4\}.$$

1. *Donner la loi de X.*
2. *Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.*

On définit la variable aléatoire $Y = 2X + 1$.

3. *Donner $Y(\Omega)$ et la loi de Y.*
4. *Calculer $\mathbb{E}(Y)$ de deux façons différentes.*

Reprendre les deux questions précédentes pour la variable $Z = (X + 1)^2$.

Correction

Par hypothèse, la loi de X est uniforme et la probabilité d'avoir $X = x$ pour tout élément x de $X(\Omega)$ est donc constante. De ce fait, cette probabilité est de $\frac{1}{|X(\Omega)|} = \frac{1}{4}$. La loi de X est donc résumée par le tableau suivant

x	-3	-2	1	4
$\mathbb{P}_X(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

On applique ici directement les résultats de cours sur la loi uniforme pour une variable aléatoire discrète (à ne pas confondre avec le cas continu).

Correction

L'espérance de X est donnée par

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}_X(x),\\ &= \frac{1}{4}\sum_{x\in X(\Omega)} x,\\ &= \frac{1}{4}(-3-2+1+4),\\ &= 0.\end{aligned}$$

Il faut toujours mentionner au moins une fois la formule qui définit l'espérance pour pouvoir l'utiliser dans une solution.

Correction

Pour calculer la variance, on utilise la formule $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$ dont le deuxième terme est nul. On sait aussi que pour toute fonction ϕ,

$$\mathbb{E}(\phi(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} \phi(x)\mathbb{P}_X(x).$$

On a donc

$$\begin{aligned}V(X) &= \mathbb{E}(X^2),\\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} x^2\mathbb{P}_X(x),\\ &= \frac{1}{4}((-3)^2+(-2)^2+1^2+4^2),\\ &= 7.\end{aligned}$$

Le rappel de la propriété générale qui permet de calculer $\mathbb{E}(\phi(X))$ n'est pas nécessaire pour le calcul de $\mathbb{E}(X^2)$ mais il est conseillé car il permet de ne pas faire l'erreur fréquente qui consiste à mettre les probabilités au carré plutôt que les valeurs de x.

Correction

Considérons $Y = 2X + 1$. Le tableau suivant donne la valeur de Y pour toutes les valeurs possibles de X :

x	-3	-2	1	4
$2x+1$	-5	-3	3	9

On a donc $Y(\Omega) = \{5, -3, 3, 9\}$.

Comme Y est une variable discrète, sa loi est déterminée par les probabilités $\mathbb{P}_Y(y)$ pour tout $y \in Y(\Omega)$. Or, $\mathbb{P}_Y(y) = \mathbb{P}_X\left(\frac{y-1}{2}\right)$ car $Y = 2X + 1$ et donc $X = \frac{Y-1}{2}$. De plus, pour tout $y \in \Omega$, $\frac{y-1}{2}$ puisqu'on a dans $Y(\Omega)$ les images par Y des valeurs de $X(\Omega)$. De ce fait, pour tout $y \in \Omega$, $\mathbb{P}_X\left(\frac{y-1}{2}\right) = \frac{1}{4}$. Donc la loi de Y est la loi uniforme sur $Y(\Omega)$.

On applique ci-dessus les propriétés classiques pour la loi d'une variable aléatoire obtenue comme fonction d'une autre variable, $Y = f(X)$. On sait en effet que pour sous-ensemble A de $Y(\Omega)$,

$$\mathbb{P}_Y(A) = \mathbb{P}_X(Y^{-1}(A)),$$

où Y^{-1} est défini par

$$Y^{-1}(A) = \{x \in X(\Omega) \mid f(x) \in A\}.$$

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète qui nous intéresse ici, il suffit de considérer les ensembles A réduits à une seule valeur, ce qui conduit à la solution proposée. Notons que celle-ci est simple car la transformation $Y = 2X + 1$ est *bijective*. La variable Z sera légèrement plus complexe à étudier.

Correction

Pour calculer $\mathbb{E}(Y)$, on peut appliquer en fait trois résultats différents. On sait que pour tout α et β déterministes, et toute variable aléatoire X, $\mathbb{E}(\alpha X + \beta) = \alpha\mathbb{E}(X) + \beta$. Ici on a donc

$$\mathbb{E}(Y) = 2\mathbb{E}(X) + 1 = 1.$$

On peut aussi appliquer le résultat rappelé ci-dessus à la fonction $\phi(x) = 2x + 1$. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(\phi(X)),\\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \phi(x)\mathbb{P}_X(x),\\
&= \frac{1}{4} \sum_{x \in X(\Omega)} (2x + 1),\\
&= \frac{1}{4}(-5 - 3 + 3 + 9),\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Enfin, on peut appliquer la définition de l'espérance à Y, ce qui donne

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum_{y\in Y(\Omega)} y\mathbb{P}_Y(y),\\ &= \frac{1}{4}\sum_{y\in Y(\Omega)} y,\\ &= \frac{1}{4}(-5-3+3+9),\\ &= 1.\end{aligned}$$

Quand on demande d'obtenir une espérance par deux méthodes différentes, c'est en général qu'on veut que le calcul soit réalisé une fois avec la définition de l'espérance (troisième calcul ci-dessus) et une autre fois en s'appuyant sur une propriété classique de l'espérance comme sa linéarité (utilisée dans le premier calcul) ou la formule pour $\mathbb{E}(\phi(X))$, appliquée très régulièrement (deuxième calcul dans la correction).

Correction

On étudie maintenant $Z = (X+1)^2$. On calcule $Z(\Omega)$ au moyen du tableau suivant qui donne les valeurs de Z en fonction des valeurs de X :

x	-3	-2	1	4
$(x+1)^2$	4	1	4	25

On constate que $Z(\Omega) = \{1, 4, 25\}$. Pour calculer la loi de Z on doit déterminer $Z^{-1}(z)$ pour tout $z \in Z(\Omega)$. Le tableau suivant résume ce calcul et la loi de Z obtenue ainsi, en appliquant la propriété $\mathbb{P}_Z(z) = \mathbb{P}_X(Z^{-1}(z))$:

z	1	4	25
$Z^{-1}(z)$	$\{-2\}$	$\{-3, 1\}$	$\{4\}$
$\mathbb{P}_Z(z) = \mathbb{P}_X(Z^{-1}(z))$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

On utilise ici le fait que la loi de X sur $X(\Omega)$ est uniforme et donc que la probabilité d'un ensemble A est donnée par le ratio entre le cardinal de A et celui de $X(\Omega)$. On remarque que le calcul est légèrement plus complexe que celui de Y car la fonction $x \mapsto (x+1)^2$ n'est pas injective : les deux valeurs distinctes -3 et 1 que peut prendre X sont toutes deux transformées en la valeur 4 pour Z. De ce fait, la loi de Z sur $Z(\Omega)$ n'est pas uniforme.

Correction

Pour calculer $\mathbb{E}(Z)$, on peut appliquer le résultat classique à $Z = \phi(X)$ avec $\phi(x) = (x+1)^2$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \mathbb{E}(\phi(X)), \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \phi(x)\mathbb{P}_X(x), \\
&= \frac{1}{4} \sum_{x \in X(\Omega)} (x+1)^2, \\
&= \frac{1}{4}(4 + 1 + 4 + 25), \\
&= \frac{17}{2}.
\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser la définition de l'espérance, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \sum_{z \in Z(\Omega)} z\mathbb{P}_Z(z), \\
&= \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{2} \times 4 + \frac{1}{4} \times 25, \\
&= \frac{17}{2}.
\end{aligned}$$

Contrairement au cas de la variable Y, les deux approches utilisées ci-dessus conduisent à des calculs légèrement différents. Dans le deuxième calcul, on a déjà « factorisé » les valeurs identiques de Z, c'est pourquoi la probabilité de 4 est de $\frac{1}{2}$. Dans le premier cas, on travaille du point de vue de X et tous les probabilités sont de $\frac{1}{2}$. Mais comme on transforme les valeurs de X en valeurs de Z, on obtient deux fois la valeur 4, ce qui conduit bien entendu au même résultat final.

Chapitre 7

Couples de variables aléatoires

Exercice 7.1

Énoncé *Soit un couple de variables aléatoires* (X, Y) *tel que* $X(\Omega) = \{-2, 0, 1\}$ *et* $Y(\Omega) = \{-1, 1, 2\}$ *dont la loi jointe est donnée par le tableau suivant :*

$\mathbb{P}(X = x, Y = y)$	$y = -1$	$y = 1$	$y = 2$
$x = -2$	0,2	0,2	α
$x = 0$	0,1	0,1	0,05
$x = 1$	0,2	0	0,1

1. *Donner l'unique valeur possible pour* α *en justifiant brièvement la réponse.*
2. *Calculer les lois marginales de* X *et de* Y*.*
3. *Montrer que* X *et* Y *ne sont pas indépendantes.*
4. *Calculer la loi conditionnelle de* X *sachant* $Y = 1$*. En déduire* $E(X|Y = 1)$*.*
5. *Calculer l'espérance conditionnelle de* X *sachant que* $Y \neq 2$*.*
6. *Calculer* $\mathbb{E}(XY)$ *et en déduire* $Cov(X,Y)$*.*
7. *On pose* $Z = X + Y$*. Calculer la loi de* Z*, puis* $\mathbb{E}(Z)$ *et* $V(Z)$*.*

Correction

On sait que $\mathbb{P}(X \in X(\Omega), Y \in Y(\Omega)) = 1$ et que

$$\mathbb{P}(X \in X(\Omega), Y \in Y(\Omega)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

Donc la somme des probabilités contenues dans le tableau doit être égale à 1. On constate que la somme est ici $0{,}95 + \alpha$. Donc $\alpha = 0{,}05$.

La justification proposée est assez détaillée. On peut se contenter de dire que la somme des probabilités doit être égale à 1, puisque c'est une propriété majeure des tableaux utilisés pour donner les lois de couple de variables aléatoires discrètes.

Correction

La loi marginale de X est donnée par

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

Un simple calcul donne les résultats résumés dans le tableau suivant

x	-2	0	1
$\mathbb{P}(X = x)$	0,45	0,25	0,3

De la même façon, on obtient la loi de Y donnée par

y	-1	1	2
$\mathbb{P}(Y = y)$	0,5	0,3	0,2

On se contente ici de justifier les calculs dans un des deux cas, par symétrie. Il est utile de vérifier que la somme des probabilités de la loi obtenue pour chaque variable est bien 1.

Correction

Les variables X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout x et y, $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y)$. Or, on remarque dans le tableau que $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 0$, alors que $\mathbb{P}(X = 1) \times \mathbb{P}(Y = 1) = 0{,}3 \times 0{,}3 \neq 0$. Les deux variables ne sont donc pas indépendantes.

Pour les questions d'indépendance, on doit toujours rappeler la définition puis essayer de l'appliquer. Quand on cherche comme ici à montrer que les variables ne sont pas indépendantes, il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur pour chaque variable telles que la probabilité du couple soit différente du produit des probabilités de chaque variable. Si on cherche à montrer l'indépendance, on doit au contraire vérifier que toutes les paires de valeurs satisfont l'égalité demandée.

Correction

On utilise la définition de la loi conditionnelle, $\mathbb{P}(X = x|Y = 1) = \frac{\mathbb{P}(X=x,Y=1)}{\mathbb{P}(Y=1)}$, ce qui conduit immédiatement à la loi résumée dans le tableau suivant

x	-2	0	1
$\mathbb{P}(X = x\|Y = 1)$	$\frac{0,2}{0,3} = \frac{2}{3}$	$\frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$	$\frac{0}{0,3} = 0$

L'espérance conditionnelle est obtenue en appliquant la définition, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X|Y = 1) &= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x|Y = 1),\\ &= -2 \times \frac{2}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times 0,\\ &= -\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

On se contente ici d'appliquer les définitions et de faire des calculs élémentaires. La question suivante est légèrement plus complexe puisqu'il faut considérer un conditionnement qui ne s'exprime pas sous la forme $Y = y$.

Correction

On doit d'abord calculer $\mathbb{P}(X = x|Y \neq 2) = \frac{\mathbb{P}(X=x,Y\neq 2)}{\mathbb{P}(Y\neq 2)}$. Or, $\{Y \neq 2\} = \{Y = -1\} \cup \{Y = 1\}$, avec une union disjointe. Donc

$$\mathbb{P}(X = x, Y \neq 2) = \mathbb{P}(X = x, Y = -1) + \mathbb{P}(X = x, Y = 1),$$

ainsi que $\mathbb{P}(Y \neq 2) = \mathbb{P}(Y = -1) + \mathbb{P}(Y = 1)$, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X = x|Y \neq 2) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = -1) + \mathbb{P}(X = x, Y = 1)}{\mathbb{P}(Y = -1) + \mathbb{P}(Y = 1)}.$$

En appliquant cette formule, on obtient la loi conditionnelle résumée dans le tableau suivant

x	-2	0	1
$\mathbb{P}(X = x\|Y \neq 2)$	$\frac{0,4}{0,8} = \frac{1}{2}$	$\frac{0,2}{0,8} = \frac{1}{4}$	$\frac{0,2}{0,8} = \frac{1}{4}$

On en déduit l'espérance conditionnelle souhaitée par le calcul suivant

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X|Y \neq 2) &= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x|Y \neq 2),\\ &= -2 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4},\\ &= -\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Comme dans l'exercice 2.1, la difficulté de l'analyse vient essentiellement de la tentation d'inventer des propriétés fausses en « généralisant » des propriétés vraies. En particulier, ici, on pourrait être tenter de croire que la probabilité $\mathbb{P}(X = x|Y \neq 2)$ est égale à la probabilité $1 - \mathbb{P}(X = x|Y = 2)$. Or, c'est en général faux. Dans le cas présent, si on considère par exemple $x = -2$, on a

$$\begin{aligned}
1 - \mathbb{P}(X = -2|Y = 2) &= 1 - \frac{\mathbb{P}(X = -2, Y = 2)}{\mathbb{P}(Y = 2)}, \\
&= 1 - \frac{0{,}05}{0{,}2}, \\
&= \frac{3}{4},
\end{aligned}$$

alors que $\mathbb{P}(X = -2|Y \neq 2) = \frac{1}{2}$. En fait, on a bien

$$1 - \mathbb{P}(X = x|Y = 2) = \mathbb{P}(X \neq x|Y = 2),$$

mais ce n'est pas utile pour calculer $\mathbb{P}(X = -2|Y \neq 2)$!

Correction

On calcule $\mathbb{E}(XY)$ en appliquant la propriété classique : pour toute fonction ϕ, on a

$$\mathbb{E}(\phi(X,Y)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} \phi(x,y)\mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

Le tableau suivant donne les calculs intermédiaires $xy\mathbb{P}(X = x, Y = y)$:

$\mathbb{P}(X = x, Y = y)$	$y = -1$	$y = 1$	$y = 2$
$x = -2$	$0{,}2 \times 2 = 0{,}4$	$0{,}2 \times -2 = -0{,}4$	$0{,}05 \times -4 = -0{,}2$
$x = 0$	$0{,}1 \times 0 = 0$	$0{,}1 \times 0 = 0$	$0{,}05 \times 0 = 0$
$x = 1$	$0{,}2 \times -1 = -0{,}2$	$0 \times 1 = 0$	$0{,}1 \times 2 = 0{,}2$

On obtient ainsi $\mathbb{E}(XY) = -0{,}2$.

Comme dans la plupart des questions de calcul, il est important de rappeler la définition de ce qu'on calcule et les propriétés utilisées, comme nous l'avons fait ci-dessus. On procède de la même façon pour la suite de la question, en rappelant la définition de la covariance et de l'espérance d'une variable seule.

Correction

On sait que $Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. On calcule donc $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$ en utilisant les définitions de ces espérances :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)\\ &= -2 \times 0{,}45 + 0 \times 0{,}25 + 1 \times 0{,}3\\ &= -0{,}6.\end{aligned}$$

De la même façon

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= -1 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}2\\ &= 0{,}2.\end{aligned}$$

On obtient finalement $Cov(X,Y) = -0{,}2 - (-0{,}6) \times 0{,}2 = -0{,}08$.

Correction

Étudions maintenant $Z = X + Y$. Le tableau suivant donne les valeurs prises par Z en fonction de celles de X et Y :

$z = x + y$	$y = -1$	$y = 1$	$y = 2$
$x = -2$	-3	-1	0
$x = 0$	-1	1	2
$x = 1$	0	2	3

On a donc $Z(\Omega) = \{-3, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Pour calculer la loi de $Z = f(X,Y)$, on doit déterminer $f^{-1}(z)$ pour tout $z \in Z(\Omega)$ puis calculer la probabilité de $f^{-1}(z)$ à partir de la loi jointe de X et Y, en utilisant la propriété $\mathbb{P}(Z = z) = \mathbb{P}((X,Y) \in f^{-1}(z))$. On obtient les résultats suivants :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z = -3) &= \mathbb{P}(X = -2, Y = -1) = 0{,}2\\ \mathbb{P}(Z = -1) &= \mathbb{P}((X,Y) \in \{(-2, 1), (0, -1)\}) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3\\ \mathbb{P}(Z = 0) &= \mathbb{P}((X,Y) \in \{(-2, 0), (1, -1)\}) = 0{,}05 + 0{,}2 = 0{,}25\\ \mathbb{P}(Z = 1) &= \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = 0{,}1\\ \mathbb{P}(Z = 2) &= \mathbb{P}((X,Y) \in \{(0, 2), (1, 1)\}) = 0{,}05 + 0 = 0{,}05\\ \mathbb{P}(Z = 3) &= \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) = 0{,}1\end{aligned}$$

On utilise la propriété classique qui caractérise la loi d'une variable définie comme fonction d'autres variables à partir de la fonction réciproque (ici f^{-1}) et de la loi jointe des autres variables.

Correction

Comme $Z = X + Y$ et que l'espérance est linéaire, on a

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = -0{,}6 + 0{,}2 = -0{,}4.$$

De plus, on sait que

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y).$$

On calcule donc les variances de X et Y. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= (-2)^2 \times 0{,}45 + 0^2 \times 0{,}25 + 1^2 \times 0{,}3 \\ &= 2{,}1,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y^2) &= (-1)^2 \times 0{,}5 + 1^2 \times 0{,}3 + 2^2 \times 0{,}2 \\ &= 1.6.\end{aligned}$$

Donc $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 1{,}74$ et $V(Y) = 1{,}56$. On obtient finalement

$$V(Z) = 1{,}74 + 1{,}56 + 2 \times (-0{,}08) = 3{,}14.$$

Notons que l'espérance et la variance de Z qui sont obtenues ici au moyen de propriétés de ces deux grandeurs pourraient aussi être calculées directement à partir de la loi de Z. Quelle que soit l'option choisie, il faut rappeler les propriétés et définitions utilisées.

Annexes

Évolutions de ce document

La dernière version de ce document se trouve sur la page http://apiacoa.org/teaching/statistics/index.fr.html.

23/04/2012 : version 0.0.1
première version diffusée avec deux exercices corrigés

26/04/2012 : version 0.0.2

- ajout d'un exercice sur les variables aléatoires discrètes ;
- ajout d'un exercice sur les lois Bernoulli et Binomiale.

27/04/2012 : version 0.0.3

- ajout d'un exercice sur la loi de Poisson ;
- ajout d'un exercice sur la loi uniforme ;
- ajout d'un exercice sur la loi exponentielle ;
- ajout d'un exercice sur la loi normale.

28/04/2012 : version 0.0.4

- ajout d'un exercice sur les variables fonction d'autres variables ;
- ajout d'un exercice sur les couples de variables.