LOI EXPONENTIELLE
EXERCICES CORRIGES

Ce document totalement gratuit (disponible parmi bien d'autres sur la page JGCUAZ.FR rubrique mathématiques) a été conçu pour aider tous ceux qui désirent travailler sur la loi exponentielle

Il contient 10 exercices corrigés intégralement, classés par thèmes et/ou par niveaux.

La page JGCUAZ.FR étant en constante évolution (ajout de nouveaux exercices, améliorations), il est conseillé de régulièrement la visiter pour y télécharger la nouvelle version de ce fichier.

Pour toute remarque, merci de vous rendre sur la page JGCUAZ.FR où vous trouverez mon adresse électronique (qui est JGCUAZ@HOTMAIL.COM à la date du 14/01/2018)

Egalement disponible une page facebook https://www.facebook.com/jgcuaz.fr

Montpellier, le 14/01/2018

Jean-Guillaume CUAZ,
professeur de mathématiques,
Lycée Clemenceau, Montpellier depuis 2013
Lycée Militaire de Saint-Cyr, de 2000 à 2013

LOIS EXPONENTIELLES - EXERCICES

Exercice n°1 (correction)

La durée de vie, en heures, d'un composant électronique est modélisée par la loi exponentielle de paramètre 0,005.

1) Quelle est la probabilité que l'un des composants pris au hasard :

a) ait une durée de vie inférieure à 100 h ?

b) soit encore en état de marche au bout de 250 h ?

2) Calculer la durée de vie moyenne de l'un de ces composants

Exercice n°2 (correction)

La durée de vie, en heures, d'une ampoule d'un certain type peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle.

1) Quel est le paramètre λ de cette loi sachant que $p(X \geq 800) = 0,2$? Arrondir au millième.

2) Calculer la durée de vie moyenne d'une ampoule

Exercice n°3 (correction)

La durée de vie, en années, d'un composant radioactif est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0005$. Calculer :

a) $p(T < 1500)$ **b)** $p(1500 < T < 2500)$ **c)** $p(T > 3000)$

d) Calculer la probabilité que ce composant ne se soit pas désintégré au bout de 2000 ans sachant qu'il n'a pas été désintégré au bout de 1000 ans.

e) Calculer la durée de vie moyenne de l'un de ces composants

Exercice n°4 (correction)

Une entreprise estime que la durée de vie X de ses machine-outil, exprimée en années, est une variable aléatoire qui soit une loi exponentielle.

Une étude statistique a permis de montrer que la durée moyenne de vie de ses machines est de 15 ans.

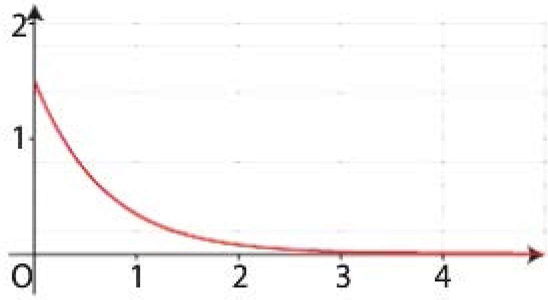
1) Calculer la probabilité que la durée de vie d'une machine soit supérieure à 25 ans.

2) Quelle est la probabilité qu'une machine ayant fonctionné pendant 15 ans soit encore opérationnelle 10 ans plus tard ?

Exercice n°5 (correction)

X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ

La courbe ci-contre représente la fonction densité de probabilité associée.



1) Lire graphiquement la valeur de λ

2) En utilisant la valeur de la question 1), calculer $p(X<1)$ et $p(X\geq 2)$

Exercice n°6 (correction)

Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$.

(t_n) est une suite arithmétique de premier terme $a\geq 0$ et de raison $r>0$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $p_n=p(X>t_n)$

1) Démontrer que la suite (p_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

2) Etudier les variations et la limite de la suite (p_n)

3) Les résultats du 2) étaient-ils prévisibles ?

Exercice n°7 (radioactivité et demi-vie) (correction)

X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$.

E(X) est l'espérance de X.

a) Montrer que $p(X>E(X))$ est indépendante de λ

b) Calculer le maximum p_λ de la fonction qui à t associe $p(X\in[t;2t])$. La valeur de t où le maximum est atteint est appelée demi-vie.

c) Calculer λ pour un atome de radon 220 (la demi-vie d'un atome de radon 220 est de 56 s)

Exercice n°8 (correction)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Une salle informatique d'un établissement scolaire est équipée de 25 ordinateurs dont 3 sont défectueux. Tous les ordinateurs ont la même probabilité d'être choisis.

On choisit au hasard deux ordinateurs de cette salle.

Quelle est la probabilité que ces deux ordinateurs soient défectueux ? Arrondir au millième.

Partie B

La durée de vie d'un ordinateur (c'est-à-dire la durée de fonctionnement avant la première panne), est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$

Ainsi, pour tout réel positif *t*, la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à *t* années, notée $p(X \leq T)$, est donnée par $p(X \leq T) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

1) Déterminer λ sachant que $p(X > 5) = 0,4$

2) Dans cette question, on prendra $\lambda = 0,18$.

Sachant qu'un ordinateur n'a pas eu de panne au cours des 3 premières années, quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 5 ans ?

3) Dans cette question, on admet que la durée de vie d'un ordinateur est indépendante de celle des autres et que $p(X > 5) = 0,4$.

a) On considère un lot de 10 ordinateurs.

Quelle est la probabilité que, dans ce lot, l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans ? On donnera une valeur arrondie au millième de cette probabilité

b) Quel nombre minimal d'ordinateurs doit-on choisir pour que la probabilité de l'événement "L'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans" soit supérieure à 0,999 ?

Exercice n°9 (correction)

Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules :

75 % de particules A et 25 % de particules B. Les particules sont projetées sur une cible formée de deux compartiments K et L. L'expérience est modélisée de la façon suivante :

- une particule au hasard parmi les particules de type A entre dans K avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et donc dans L avec la probabilité $\frac{2}{3}$

- une particule au hasard parmi les particules de type B entre dans chacun des compartiments avec la même probabilité.

Partie A

1) Une particule est prise au hasard.

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A_1 : "La particule isolée est de type A et elle entre dans K";

A_2 : "La particule isolée est de type A et elle entre dans L";

B_1 : "La particule isolée est de type B et elle entre dans K";

A_1 : "La particule isolée est de type B et elle entre dans L";

C_1 : "La particule entre dans K"; C_2 : "La particule entre dans L".

2) On procède cinq fois de suite et de façon indépendante à l'épreuve décrite en introduction.

Le nombre de particules étant très grand, on admettra que les proportions 75% et 25% restent constantes. Calculer la probabilité de l'événement E "il y a exactement deux particules dans L".

Partie B

Un récipient contient le gaz décrit précédemment.

Les particules A sont radioactives et se transforment spontanément en particules B.

Chaque particule A donne, en se transformant, une particule B.

On note $p(t)$ la proportion de particules A dans le gaz. A l'instant $t=0$, on a donc $p(0)=0,75$.

Plus généralement, si t est exprimé en années, on a $p(t)=0,75e^{-\lambda t}$ où $\lambda>0$.

La demi-vie des particules A est égale à 5730 ans, ce qui signifie qu'au bout de cette durée, la moitié des particules se seront désintégrées.

1) Calculer λ, puis en donner la valeur approchée à 10^{-5} près par défaut.

Cette valeur sera utilisée pour la suite de l'exercice.

2) Au bout de combien d'années 10% des particules de type A se seront-elles transformées en particules de type B ?

3) Déterminer la valeur de t pour laquelle il y aura autant de particules de type A que de particules de type B.

Exercice n°10 - d'après le concours FESIC 2016 - VRAI ou FAUX ? (correction)

La durée de vie (exprimée en années) d'un appareil électroménager avant la première panne est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$

a. Pour tout réel *t* strictement positif, $p(X \geq t) = 1 - e^{-\lambda t}$

b. Si la probabilité d'avoir une panne la première année est égale à 0,2, alors $\lambda = \ln\left(\frac{5}{4}\right)$

LOIS EXPONENTIELLES - CORRECTION

Correction de l'exercice n°1 (retour à l'énoncé)

1) a) $p(0 \leq X \leq 100) = \int_0^{100} 0,005e^{-0,005\times t}dt = \left[-e^{-0,005\times t}\right]_0^{100} = e^{-0,005\times 0} - e^{-0,005\times 100} = 1 - e^{-0,5} \approx 0,39$

b) On calcule : $p(X \geq 250) = 1 - p(X < 250) = 1 - \int_0^{250} 0,005e^{-0,005\times t}dt = 1 - \left[-e^{-0,005\times t}\right]_0^{250}$

$= 1 - \left(e^{-0,005\times 0} - e^{-0,005\times 250}\right) = e^{-0,005\times 250} = e^{-1,25} \approx 0,29$

2) La durée de vie moyenne de l'un de ces composants est égale à $E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,005} = 200$

Correction de l'exercice n°2 (retour à l'énoncé)

1) $p(X \geq 800) = 1 - p(X < 800) = 1 - \int_0^{800} \lambda e^{-\lambda\times t}dt = 1 - \left[-e^{-\lambda\times t}\right]_0^{800} = 1 - \left(e^{-\lambda\times 0} - e^{-\lambda\times 800}\right) = e^{-800\lambda}$

L'égalité $p(X \geq 800) = 0,2$ devient alors équivalente à :

$e^{-800\lambda} = 0,2 \Leftrightarrow -800\lambda = \ln(0,2) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln(0,2)}{800} \approx 0,002$ à 0,001 près

2) La durée de vie moyenne d'une ampoule est égale à $E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{-\frac{\ln(0,2)}{800}} = -\frac{800}{-\ln(0,2)} \approx 497\,h$

Correction de l'exercice n°3 (retour à l'énoncé)

a) $p(T < 1500) = p(0 \leq T < 1500) = e^{-0,0005\times 0} - e^{-0,0005\times 1500} = 1 - e^{-0,75} \approx 0,53$ à 0,01 près

b) $p(1500 < T < 2500) = e^{-0,0005\times 1500} - e^{-0,0005\times 2500} = e^{-0,75} - e^{-1,25} \approx 0,19$ à 0,01 près

c) $p(T > 3000) = e^{-0,0005\times 3000} = e^{-1,5} \approx 0,22$ $p(X \geq c) = e^{-\lambda c}$

d) On calcule :

$p_{(T\geq 1000)}(T \geq 2000) = \frac{p((T \geq 2000)\cap(T \geq 1000))}{p(T \geq 1000)} = \frac{p(T \geq 2000)}{p(T \geq 1000)}$

$= \frac{e^{-0,0005\times 2000}}{e^{-0,0005\times 1000}} = e^{-0,0005\times(2000-1000)} = e^{-0,0005\times 1000} = e^{-0,5} \approx 0,61$ à 0,01 près

Remarque : Un résultat du cours nous permet d'écrire que :

$p_{(T\geq 1000)}(T \geq 2000) = p_{(T\geq 1000)}(T \geq 1000 + 1000) = p(T \geq 1000) = e^{-0,0005\times 1000} = e^{-0,5} \approx 0,61$ à 0,01 près

e) La durée de vie moyenne de l'un de ces composants est égale à $E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,0005} = 2000$ ans

Correction de l'exercice n°4 (retour à l'énoncé)

1) Puisque " la durée moyenne de vie de ses machines est de 15 ans" cela signifie que $E(X)=25 \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}=25 \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{25}=0,04$

La probabilité que la durée de vie d'une machine soit supérieure à 25 ans est égale à

$p(X \geq 25)=e^{-0,04\times 25}=e^{-1} \approx 0,37$ à 0,01 près

2) D'après le cours :

$p_{(X\geq 15)}(T \geq 15+10)=p(X \geq 10)=e^{-0,04\times 10}=e^{-0,4} \approx 0,67$ à 0,01 près

Correction de l'exercice n°5 (retour à l'énoncé)

1) Puisque la fonction de densité d'une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ est $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, on aura $f(0)=\lambda e^{-\lambda\times 0}=\lambda\times e^{0}=\lambda\times 1=\lambda$.

On lit sur graphique précédent que $\lambda=f(0)=1,5$

2) On calcule $p(X<1)=1-e^{-1,5\times 1}\approx 0,78$ à 0,01 près et $p(X\geq 2)=e^{-1,5\times 2}=e^{-3}\approx 0,05$ à 0,01 près

Correction de l'exercice n°6 (retour à l'énoncé)

1) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $p_{n+1}=p(X>t_{n+1})=e^{-\lambda\times t_{n+1}}=e^{-\lambda\times(t_n+r)}=e^{-\lambda t_n}e^{-\lambda r}$

Comme $p_n=p(X>t_n)=e^{-\lambda\times t_n}$, on en déduit que $p_{n+1}=e^{-\lambda r}\times p_n$.

La suite (p_n) est donc géométrique de raison $e^{-\lambda r}$ et de premier terme $p_0=p(X>t_0)=p(X>a)=e^{-\lambda\times a}$

2) Puisque pour tout $n\in\mathbb{N}$, $p_n>0$ et $p_{n+1}=e^{-\lambda r}\times p_n$, on en conclut que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0<\frac{p_{n+1}}{p_n}=e^{-\lambda r}<1$ car $r>0$, donc que la suite (p_n) est strictement décroissante.

Puisque $0<e^{-\lambda r}<1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(e^{-\lambda r}\right)^n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=0$

3) Puisque (t_n) est une suite arithmétique de raison $r>0$, on a nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=+\infty$ donc nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=\lim\limits_{n\to+\infty}p(X>t_n)=0$

Correction de l'exercice n°7 (radioactivité et demi-vie) (retour à l'énoncé)

a) Puisque $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ on a $p\big(X>E(X)\big)=e^{-\lambda E(X)}=e^{-\lambda\times\frac{1}{\lambda}}=e^{-1}$ qui est bien indépendante de λ

b) On calcule $p\big(X\in[t;2t]\big)=p(t\le X\le 2t)=e^{-\lambda t}-e^{-2\lambda t}$. La fonction $g:t\mapsto e^{-\lambda t}-e^{-2\lambda t}$ a pour dérivée la fonction $g':t\mapsto -\lambda e^{-\lambda t}+2\lambda e^{-2\lambda t}=\lambda e^{-\lambda t}\left(-1+2e^{-\lambda t}\right)$

Puisque pour tout $\lambda>0$ et tout réel t on a $\lambda e^{-\lambda t}>0$ d'où :

$$g'(t)=0\Leftrightarrow -1+2e^{-\lambda t}=0\Leftrightarrow e^{-\lambda t}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\lambda t=\ln\left(\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow t=\frac{-\ln(2)}{-\lambda}=\frac{\ln(2)}{\lambda}$$

et $g'(t)\ge 0\Leftrightarrow -1+2e^{-\lambda t}\ge 0\Leftrightarrow e^{-\lambda t}\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\lambda t\ge\ln\left(\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow t\le\frac{-\ln(2)}{-\lambda}=\frac{\ln(2)}{\lambda}$.

La fonction g est donc strictement croissante sur $\left[0;\frac{\ln(2)}{\lambda}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{\ln(2)}{\lambda};+\infty\right[$. Elle atteint donc son maximum pour $p_\lambda=\frac{\ln(2)}{\lambda}$ appelé demi-vie.

c) La demi-vie d'un atome de radon 220 étant de 56 s, on aura $56=\frac{\ln(2)}{\lambda}\Leftrightarrow\lambda=\frac{\ln(2)}{56}\approx 0{,}012$ à 0,001 près

Correction de l'exercice n°8 (retour à l'énoncé)

Partie A

Si on note Y le nombre d'ordinateurs défectueux parmi les 2 choisis au hasard, Y suit la loi binomiale de paramètres $n=2$ et $p=\frac{3}{25}$.

La probabilité que les deux ordinateurs choisis soient défectueux est égale à :

$$p(Y=2)=\binom{2}{2}\times\left(\frac{3}{25}\right)^2\times\left(\frac{22}{25}\right)^{23}\approx 7{,}61\times 10^{-4}$$

Partie B

1) On a $p(X>5)=1-p(X\le 5)=\int_0^5\lambda e^{-\lambda x}dx=\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^5=-e^{-\lambda\times 5}-\left(-e^{-\lambda\times 0}\right)=1-e^{-5\lambda}$.

L'égalité $p(X>5)=0{,}4$ se traduit par :

$1-e^{-5\lambda}=0{,}4\Leftrightarrow e^{-5\lambda}=0{,}6\Leftrightarrow -5\lambda=\ln(0{,}6)\Leftrightarrow\lambda=\frac{\ln(0{,}6)}{-5}\approx 0{,}102$ à 0,001 près.

2) D'après le cours, $p_{(X\geq 3)}(X\geq 5)=p_{(X\geq 3)}(X\geq 3+2)=p(X\geq 2)=e^{-\lambda\times 2}=e^{-0,18\times 2}=e^{-0,36}\approx 0,698$ à 0,001 près.

3) Dans cette question, on admet que la durée de vie d'un ordinateur est indépendante de celle des autres et que $p(X>5)=0,4$.

a) On considère un lot de 10 ordinateurs.
Quelle est la probabilité que, dans ce lot, l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans ? On donnera une valeur arrondie au millième de cette probabilité
Si on note Z le nombre d'ordinateurs dont la durée de vie est supérieure à 5 ans parmi les 10 choisis au hasard, Z suit la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=p(X>5)=0,4$.
La probabilité que l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans est égale à :

$$p(Z\geq 1)=1-p(Z=0)=1-\binom{10}{0}\times 0,4^0\times 0,6^{10}=1-0,6^{10}\approx 0,994$$

b) Notons *n* le nombre d'ordinateurs choisis.
La probabilité pour que, sur ces *n* ordinateurs, l'un au moins ait une durée de vie supérieure à 5 ans est égale à : $1-\binom{n}{0}\times 0,4^0\times 0,6^n=1-0,6^n$

Cette probabilité est supérieure à 0,999 si et seulement si :

$$1-0,6^n\geq 0,999\Leftrightarrow 0,6^n\leq 0,001\Leftrightarrow n\ln(0,6)\leq\ln(0,001)\Leftrightarrow n\geq\frac{\ln(0,001)}{\ln(0,6)}$$

Puisque $\frac{\ln(0,001)}{\ln(0,6)}\approx 13,52$ à 0,01 près et puisque *n* est un nombre entier, il faut choisir au moins 14 ordinateurs pour que la probabilité de l'événement "L'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans" soit supérieure à 0,999.

Correction de l'exercice n°9 (retour à l'énoncé)

Partie A

1) On note A (resp B) l'événement "la particule est de type A (resp de type B)"

On note K (resp L) l'événement "la particule entre dans K (resp dans L)"

D'après la définition des probabilités conditionnelles, on a :

$$p(A_1)=p(A\cap K)=p(A)\times p_A(K)=0,75\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4},$$

$$p(A_2)=p(A\cap L)=p(A)\times p_A(L)=0,75\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$$

$$p(B_1)=p(B\cap K)=p(B)\times p_B(K)=0,25\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

$p(B_2) = p(B \cap L) = p(B) \times p_B(L) = 0,25 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

De plus $p(C_1) = p(A_1) + p(B_1) = p(A \cap K) + p(B \cap K) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ d'où on déduit $p(C_2) = p(\overline{C_1}) = 1 - p(C_1) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

2) Si on note X le nombre de particules entrées dans L parmi les 5 projetées, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = p(C_2) = \frac{5}{8}$.

La probabilité qu'exactement 2 particules sur les 5 soient entrées dans L est égale à :

$p(X = 2) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{5}{8}\right)^2 \times \left(\frac{3}{8}\right)^3 \approx 0,206$ à 0,001 près.

Partie B

1) On résout :

$$p(5730) = \frac{0,75}{2} \Leftrightarrow 0,75e^{-\lambda \times 5730} = \frac{0,75}{2} \Leftrightarrow e^{-\lambda \times 5730} = \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow -\lambda \times 5730 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \lambda \times 5730 = \frac{-\ln(2)}{-5730} \approx 1,2 \times 10^{-4} \approx 0,00012$ à 10^{-5} près par défaut.

2) On doit résoudre l'équation $p(t) = 0,9 \times 0,75 \Leftrightarrow 0,75e^{-0,00012t} = 0,9 \times 0,75 \Leftrightarrow e^{-0,00012t} = 0,9$

$$\Leftrightarrow -0,00012t = \ln(0,9) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(0,9)}{-0,00012} \approx 878$$

C'est donc au bout de 878 ans que 10% des particules de type A se seront transformées en particules de type B.

3) On doit résoudre l'équation $p(t) = 0,5 \Leftrightarrow 0,75e^{-0,00012t} = 0,5 \Leftrightarrow e^{-0,00012t} = \frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow -0,00012t = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{-0,00012} \approx 2027$$

C'est donc au bout de 2027 ans qu' il y aura autant de particules de type A que de particules de type B.

Correction de l'exercice n°10 - d'après le concours FESIC 2016 - VRAI ou FAUX ? (retour à l'énoncé)

a. FAUX

$$p(X \geq t) = 1 - p(X < t) = 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - \left(-e^{-\lambda t} - \left(-e^{-\lambda 0}\right)\right) = e^{-\lambda t}$$

b. VRAI

Puisque $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = -e^{-\lambda t} - \left(-e^{-\lambda 0}\right) = 1 - e^{-\lambda t}$, l'information "la probabilité d’avoir une panne la première année est égale à 0,2" se traduit par $p(X \leq 1) = 0,2$ c'est-à-dire $1 - e^{-\lambda \times 1} = 0,2 \Leftrightarrow e^{-\lambda} = 0,8 \Leftrightarrow -\lambda = \ln(0,8) \Leftrightarrow \lambda = -\ln(0,8) = -\ln\left(\frac{4}{5}\right) = \ln\left(\frac{5}{4}\right)$