**Loi exponentielle de paramètre $\lambda$ : Exercices**
Corrigés en vidéo avec le cours sur jaicompris.com

---

**Comprendre la définition de la loi exponentielle**
Soit $\lambda$ un réel strictement positif.
Démontrer que la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ est une densité de probabilité.

---

**Savoir déterminer la valeur du paramètre $\lambda$**
Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$. On sait que $P(X \leq 1000) = 0{,}3$.
1) Déterminer la valeur exacte de $\lambda$ puis en donner une valeur approchée à $10^{-5}$ près.
2) Dans cette question, on admet que $\lambda = 0{,}00036$. Déterminer une valeur approchée de $P(X \geq 500)$ à $10^{-5}$ près.

---

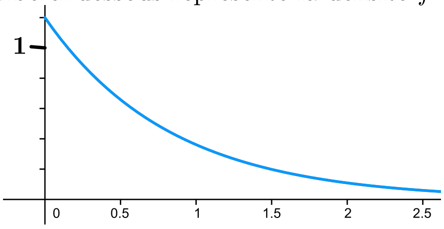
La durée de vie T en année, d'un appareil avant la première panne suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$.
D'après une étude, la probabilité que cet appareil tombe en panne pour la première fois avant la fin de la première année est 0,2. D'après cette étude, déterminer la valeur de $\lambda$ à $10^{-2}$ près.

---

La durée de vie T en année, d'un appareil avant la première panne suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$.
D'après une étude, la durée de vie moyenne de cet appareil avant la première panne est de deux ans.
D'après cette étude, déterminer la valeur de $\lambda$ à $10^{-2}$ près.

---

**Savoir lire la valeur du paramètre $\lambda$**
La courbe ci-dessous représente la densité $f$ d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.




Déterminer la probabilité $P(X \geqslant 2)$.

---

La durée de vie T en année, d'un appareil avant la première panne suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}3$.
1) Quelle est la probabilité que l'appareil ne connaisse pas de panne au cours des trois premières années.
2) Quelle est la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la deuxième année.
3) L'appareil n'a connu aucune panne les deux premières années.
Quelle est la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante ?

---

**Savoir démontrer la formule de l'espérance d'une loi exponentielle**
Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
On considère la fonction $g$ définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = \lambda x e^{-\lambda x}$.
1) Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que la fonction $G$ définie sur $[0;+\infty[$ par $G(x) = (ax+b)e^{-\lambda x}$ soit une primitive de $g$.
2) En déduire que l'espérance de X, notée $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$.

---

**Loi sans vieillissement ou sans mémoire**
A un standard téléphonique, on entend « Votre temps d'attente est estimé à 5 minutes ».
Ce temps d'attente en minute, noté T, est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle et l'estimation annoncée correspond à l'espérance de T. Vous avez déjà attendu plus d'une minute.
Quelle est la probabilité d'attendre plus de 10 minutes au total ?

---

**Savoir déterminer $\lambda$**
Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Déterminer $\lambda$ sachant que $P(1 \leqslant X \leqslant 2) = \dfrac{1}{4}$.

**Loi exponentielle et probabilité conditionnelle**
Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ telle que $P(X \leqslant 100) = 0{,}09$.
1) Déterminer la probabilité $P_{X \geqslant 800}(X \geqslant 900)$.
2) Déterminer la probabilité $P_{X \leqslant 400}(X \geqslant 500)$.

---

**Loi exponentielle et carbone 14**
La durée de vie X, en année du carbone 14 suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
On appelle demi-vie de X le réel $t$ tel que $P(X \leqslant t) = P(X \geqslant t)$.
1) Démontrer $P(X \leqslant t) = \dfrac{1}{2}$.
2) Démontrer que $t = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$.
3) On observe que la demi-vie du carbone 14 est de 5568 ans. Déterminer $P(X \leqslant 1000)$ à $10^{-3}$ près.
4) Quelle est la probabilité que la durée du vie du carbone 14 soit supérieure à deux demi-vies ?

---

**Loi exponentielle et loi binomiale**
On souhaite équiper une salle informatique d'ordinateurs. La durée de vie d'un ordinateur est indépendante de celle des autres ordinateurs. La durée de vie, en année, d'un ordinateur est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}18$.
Combien faut-il au minimum mettre d'ordinateurs dans la salle pour que la probabilité de l'événement « L'un au moins des ordinateurs fonctionne encore après 5 ans » soit supérieure à 0.99 ?

---

La durée de vie, en année, d'une ampoule LED est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}2$. Dix LED neuves ont été mises en service en même temps.
Soit X la variable aléatoire qui indique le nombre de LED qui fonctionnent encore après 4 années.
Déterminer à $10^{-3}$ près, $P(X = 7)$.

---

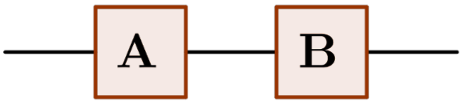
**Loi exponentielle et probabilité conditionnelle**
On achète dans un sachet des composants tous identiques mais dont certains présentent un défaut.
La probabilité qu'un composant ait un défaut est 0,02.
La durée de vie $T_1$ en heure d'un composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 5 \times 10^{-4}$.
La durée de vie $T_2$ en heure d'un composant sans défaut suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-4}$.
Un composant du sachet fonctionne encore 1000 heures après sa mise en service.
Quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux, à $10^{-2}$ près ?

---

La durée de vie T, en heure, d'un appareil est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle.
La probabilité que cet appareil fonctionne encore après 100 heures est de 0,9.
Calculer à une heure près, la durée $d$ pour laquelle la probabilité qu'il fonctionne encore soit de 0,8.

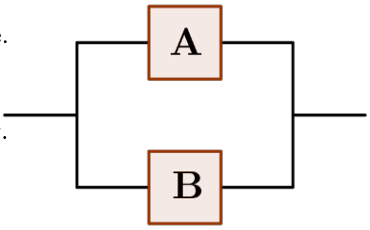
---

**Loi exponentielle et montage en série**
Deux composants identiques A et B sont montés en série sur une machine.
La durée de vie, en jours, de chaque composant est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.0002$.
La machine tombe en panne dès qu'un des composants cesse de fonctionner.
Les durées de vie de A et B sont indépendantes.
Déterminer la probabilité que la machine fonctionne encore après 100 jours.




---

**Loi exponentielle et montage en parallèle**
Deux composants identiques A et B sont montés en parallèles sur une machine.
La durée de vie, en jours, de chaque composant est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.0002$.
La machine tombe en panne que si les deux composants cessent de fonctionner.
Les durées de vie de A et B sont indépendantes.
Déterminer la probabilité que la machine fonctionne encore après 100 jours.




---