LOI UNIFORME - EXERCICES CORRIGES

Ce document totalement gratuit (disponible parmi bien d'autres sur la page JGCUAZ.FR rubrique mathématiques) a été conçu pour aider tous ceux qui désirent travailler sur les lois uniformes.

Il contient 9 exercices corrigés intégralement, classés par thèmes et/ou par niveaux.
La page JGCUAZ.FR étant en constante évolution (ajout de nouveaux exercices, améliorations), il est conseillé de régulièrement la visiter pour y télécharger la nouvelle version de ce fichier.

Pour toute remarque, merci de vous rendre sur la page JGCUAZ.FR où vous trouverez mon adresse électronique (qui est JGCUAZ@HOTMAIL.COM à la date du 14/01/2018)

Egalement disponible une page facebook https://www.facebook.com/jgcuaz.fr

Montpellier, le 14/01/2018

Jean-Guillaume CUAZ,
professeur de mathématiques,
Lycée Clemenceau, Montpellier depuis 2013
Lycée Militaire de Saint-Cyr, de 2000 à 2013

LOI UNIFORME

EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1 (correction)

X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle I.

Déterminer la fonction de densité de probabilité, puis calculer $p(1 \leq X \leq 3)$ lorsque :

a) $I = [1;5]$ **b)** $I = [-2;3]$

Exercice n°2 (correction)

X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle [-2;2].

a) Calculer $p(X < 1)$ et $p(X \geq 0,5)$

b) Calculer $p_{(X>0)}(X < 1)$

c) Donner l'espérance de X.

Exercice n°3 (correction)

Caroline a dit qu'elle passerait voir Julien à un moment quelconque entre 18h30 et 20h45.

Quelle est la probabilité qu'elle arrive pendant le feuilleton préféré de Julien qui dure de 19h à 19h30 ?

Exercice n°4 (correction)

La commande $\boxed{\text{rand}}$ (ou $\boxed{\text{NbrAléat}}$) permet d'afficher un nombre aléatoire de l'intervalle [0;1[.

X est la variable aléatoire égale au nombre affiché avec cette commande.

a) Calculer $p(0,33 \leq X \leq 0,59)$

b) Sachant que X<0,3, quelle est la probabilité de l'événement E : "Son chiffre des centièmes est 1"?

c) Calculer l'espérance de X

Exercice n°5 (correction)

On choisit un nombre au hasard dans l'intervalle [-1;3].

Sachant qu'il est supérieur à 0, quelle est la probabilité qu'il soit inférieure à 2 ?

Exercice n°6 (correction)

On choisit un nombre réel au hasard dans l'intervalle [0;2].

1) Quelle est la probabilité qu'il soit solution de l'inéquation $9x^2-33x+10>0$

2) Quelle est la probabilité qu'il soit solution de l'équation $9x^2-33x+10=0$

Exercice n°7 (correction)

La durée d'une communication téléphonique entre Claire et Alice ne dépasse jamais 1h.

On suppose que sa durée en heures est un nombre aléatoire entre 0 et 1.

Claire appelle Alice au téléphone.

Déterminer la probabilité que la durée de communication soit :

a) de 30 min

b) d'au plus 3 quarts d'heure

c) d'au moins 10 min

d) comprise entre 20 min et 40 min.

Exercice n°8 (correction)

Une horloge s'arrête de façon aléatoire.

X est la variable aléatoire donnant l'heure indiquée au moment où l'horloge s'arrête (entre 0h et 12h).

1) Donner la fonction densité de probabilité de X et la représenter dans un repère.

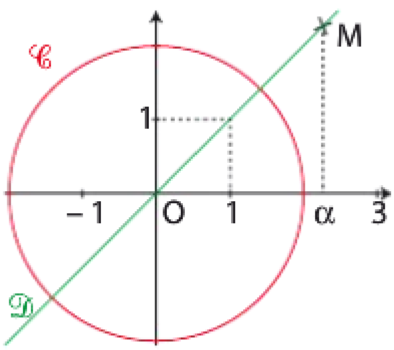
2) Quelle est la probabilité que l'aiguille des heures s'arrête entre 3h et 7h ?

3) Calculer E(X).

Exercice n°9 (correction)

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

C est le cercle de centre O et de rayon 2 et *D* la droite d'équation $y=x$. M est le point d'abscisse α de la droite *D*.



On choisit une valeur de α au hasard dans l'intervalle [-1;3].

a) Quelle est la probabilité que le point M ait une ordonnée positive ?

b) Quelle est la probabilité que le point M soit situé à l'intérieur du cercle *C* ?

LOI UNIFORME

CORRECTION

Correction de l'exercice n°1 (retour à l'énoncé)

a) La fonction de densité de probabilité de la loi uniforme sur $I=[1;5]$ est : $f(x)=\frac{1}{5-1}=\frac{1}{4}$ et

$p(1\leq X\leq 3)=\frac{3-1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

b) La fonction de densité de probabilité de la loi uniforme sur $I=[-2;3]$ est : $f(x)=\frac{1}{3-(-2)}=\frac{1}{5}$

et $p(1\leq X\leq 3)=\frac{3-1}{5}=\frac{2}{5}$

Correction de l'exercice n°2 (retour à l'énoncé)

La fonction de densité de probabilité de la loi uniforme sur $I=[-2;2]$ est : $f(x)=\frac{1}{2-(-2)}=\frac{1}{4}$ et :

a) $p(X<1)=p(-2\leq X<1)=\frac{1-(-2)}{4}=\frac{3}{4}$

$p(X\geq 0,5)=p(0,5\leq X<1)=\frac{1-0,5}{4}=\frac{0,5}{4}=\frac{1}{8}$

b) On a :

$$p_{(X>0)}(X<1)=\frac{p((X>0)\cap(X<1))}{p(X>0)}=\frac{p(0<X<1)}{p(X>0)}=\frac{p(0<X<1)}{p(X>0)}=\frac{p(0<X<1)}{p(0<X\leq 2)}=\frac{\frac{1-0}{4}}{\frac{2-0}{4}}=\frac{1}{2}$$

c) $E(X)=\frac{-2+2}{2}=0$

Correction de l'exercice n°3 (retour à l'énoncé)

On note X la variable aléatoire désignant l'heure de visite de Caroline.

X suit la loi uniforme sur $I=[18,5;20,75]$

La fonction de densité de probabilité de la loi uniforme sur $I=[18,5;20,75]$ est : $f(x)=\frac{1}{20,75-18,5}=\frac{1}{2,25}=\frac{1}{\frac{9}{4}}=\frac{4}{9}$ et :

La probabilité pour que Caroline arrive entre 19h à 19h30 est égale à :

$$p(19\le X\le 19,5)=\frac{19,5-19}{\frac{9}{4}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{4}}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$$

Correction de l'exercice n°4 (retour à l'énoncé)

X suit la loi uniforme sur $I=[0;1[$. Sa densité de probabilité est la fonction définie sur $I=[0;1[$ par $f(x)=\frac{1}{1-0}=1$ et :

a) $p(0,33\le X\le 0,59)=\frac{0,59-0,33}{1}=0,26$

b) Les nombres de $I=[0;1[$ dont le chiffre des centièmes est 1 représentent $\frac{1}{10}$ de l'ensemble des réels de $I=[0;1[$.

Si on impose de plus que ces nombres soient strictement inférieurs à 0,3, ce la représente une proportion égale à $0,3\times\frac{1}{10}=\frac{3}{100}$ de l'ensemble des réels de $I=[0;1[$.

Autrement dit, $p_{(X<0,3)}(E)=\frac{p((X<0,3)\cap E)}{p(X<0,3)}=\frac{\frac{3}{100}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{10}$

c) $E(X)=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$

Correction de l'exercice n°5 (retour à l'énoncé)

Si on note X le nombre choisi au hasard dans l'intervalle [-1;3], X suit la loi uniforme sur $I=[-1;3]$

Sa densité de probabilité est la fonction définie sur $I=[-1;3]$ par $f(x)=\frac{1}{3-(-1)}=\frac{1}{4}$ et :

On a alors $p_{(X>0)}(X<2)=\frac{p((X>0)\cap(X<2))}{p(X>0)}=\frac{p(0<X<2)}{p(0<X<3)}=\frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$

Correction de l'exercice n°6 (retour à l'énoncé)

Si on note X le nombre choisi au hasard dans l'intervalle [0;2], X suit la loi uniforme sur $I=[0;2]$

Sa densité de probabilité est la fonction définie sur $I=[0;2]$ par $f(x)=\frac{1}{2-0}=\frac{1}{2}$.

1) Si on note $P(x)=9x^2-33x+10$, le calcul de son discriminant donne $\Delta=(-33)^2-4\times9\times10=729$, d'où l'existence de deux racines réelles distinctes $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-33)-\sqrt{729}}{2\times9}=\frac{33-27}{18}=\frac{1}{3}$ et $x_2=\frac{-(-33)+\sqrt{729}}{2\times9}=\frac{33+27}{18}=\frac{20}{3}$.

Puisque $a=9>0$, le tableau de signes de $P(x)$ est :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{20}{3}$		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Les solutions dans l'intervalle [0;2] de l'inéquation $9x^2-33x+10>0$ appartiennent à l'intervalle $\left[0;\frac{1}{3}\right[$

Si on choisit un nombre au hasard, la probabilité qu'il soit solution de l'inéquation $9x^2-33x+10>0$ est égale à : $p\left(0\le X<\frac{1}{3}\right)=\frac{\frac{1}{3}-0}{2}=\frac{1}{6}$

2) Comme l'équation $9x^2-33x+10=0$ n'admet qu'un nombre fini de solutions (deux solutions $x_1=\frac{1}{3}$ et $x_2=\frac{20}{3}$, la probabilité pour qu'un nombre choisi au hasard dans l'intervalle $I=[0;2]$ soit solution de l'équation $9x^2-33x+10=0$ est nulle.

Correction de l'exercice n°7 (retour à l'énoncé)

On note X la variable aléatoire désignant la durée de la communication téléphonique entre Claire et Alice. X suit la loi uniforme sur $I = [0;1]$

La fonction de densité de probabilité de la loi uniforme sur $I = [0;1]$ est : $f(x) = \frac{1}{1-0} = 1$ et :

a) $p(X = 0,5) = 0$

b) $p(0 \leq X \leq 0,75) = \frac{0,75-0}{1} = \frac{3}{4}$

c) $p\left(X \geq \frac{1}{6}\right) = p\left(\frac{1}{6} \leq X \leq 1\right) = \frac{1-\frac{1}{6}}{1} = \frac{5}{6}$

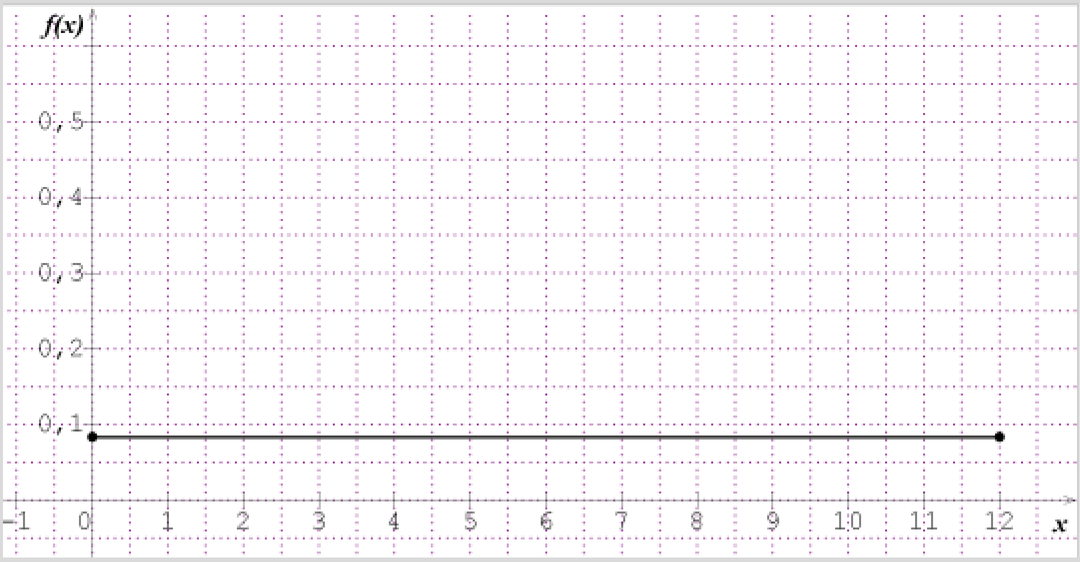
d) $p\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right) = \frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$

Correction de l'exercice n°8 (retour à l'énoncé)

On note X la variable aléatoire désignant l'heure indiquée au moment où l'horloge s'arrête (entre 0h et 12h). X suit la loi uniforme sur $I = [0;12]$

1) La fonction de densité de probabilité de la loi uniforme sur $I = [0;12]$ est : $f(x) = \frac{1}{12-0} = \frac{1}{12}$

Sa représentation dans un repère est :



2) Quelle est la probabilité que l'aiguille des heures s'arrête entre 3h et 7h ?

L'aiguille des heures s'arrête entre 3h et 7h pour des heures comprises entre 3h00 et 7h59. Ainsi :

$$p(3 \leq X < 8) = \frac{8-3}{12} = \frac{5}{12}$$

3) $E(X) = \frac{0+12}{2} = 6$

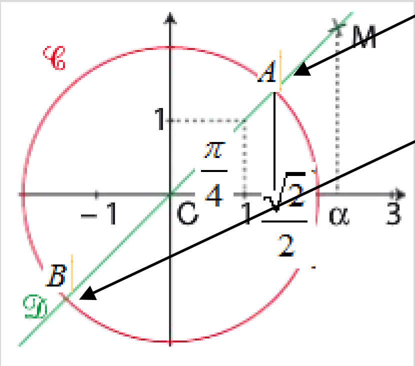
Correction de l'exercice n°9 (retour à l'énoncé)

a) X suit la loi uniforme sur $I=[-1;3]$

Puisque M est le point d'abscisse α de la droite D d'équation $y=x$, on en déduit que M aura une ordonnée positive si et seulement si son abscisse est positive.

On calcule alors $p(\alpha\geq 0)=\dfrac{p(0\leq\alpha\leq 3)}{3-(-1)}=\dfrac{3}{4}$

b) Les deux points d'intersection de D et de C sont $A\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $B\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ correspondant respectivement aux angles $\dfrac{\pi}{4}$ et $-\dfrac{3\pi}{4}$



Le point M sera situé à l'intérieur du cercle C si et seulement si $-1\leq\alpha<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

On calcule donc $p\left(-1\leq\alpha<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}-(-1)}{3-(-1)}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1}{4}=\dfrac{\sqrt{2}+2}{8}$