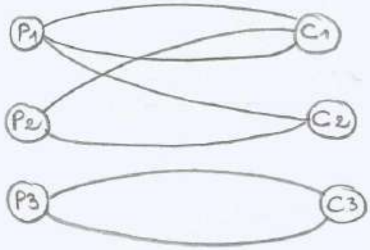
Serie 1

Exo 1 :

1/



1 arete = 1 heur de cour

2/ on obtient un graphe non orienté qui est bipartie

Matrice d'adjacence :

	P1	P2	P3	C1	C2	C3
P1	0	0	0	2	1	0
P2	0	0	0	1	1	1
P3	0	0	0	1	1	2
C1	2	1	1	0	0	0
C2	1	1	1	0	0	0
C3	0	1	2	0	0	0

3/ il faut au min 4h

	1^{er}h	2^{eme}h	3^{eme}h	4h
C_1	P1	P1	P2	P3
C_2	P2	P2	P3	/
C_3	P3	P3	P1	/

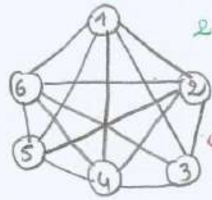
Exo2 : 200 - 500 - 300 - 600 - 100 - 400

[200] [300 / 500] [100 / 600] [400]

il faut au min 4 fourgons

exo 3 :

TG (TD) g6



2/ on obtient un grp non orienté complet

complet : tous les sommets sont relier entre eux

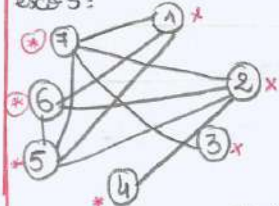
	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	1	1
2	1	0	1	1	1	1
3	1	1	0	1	1	1
4	1	1	1	0	1	1
5	1	1	1	1	0	1
6	1	1	1	1	1	0

3/ on a 15 Matches, 3 matchs par jour donc il faut 5j pour terminer le tournoi

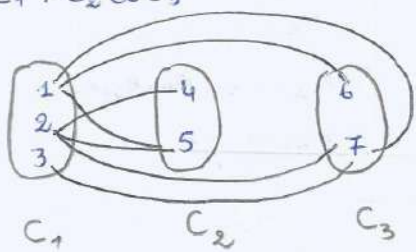
4/

J1	J2	J3	J4	J5
1 - 2	2 - 3	1 - 3	1 - 4	1 - 5
3 - 4	4 - 5	2 - 5	2 - 6	2 - 4
5 - 6	1 - 6	4 - 6	3 - 5	3 - 6

exo 5 :

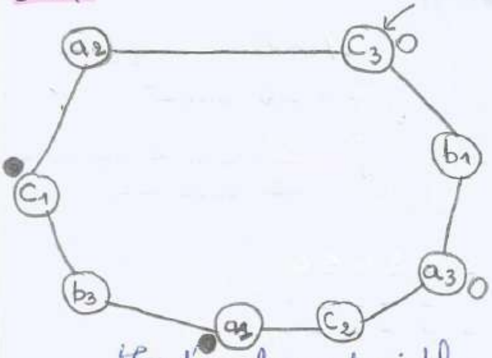


3/ en utilisant l'algo de K-coloration on obtient 3 classe de sommet C_1, C_2 et C_3



$C_1 \cup C_2 \cup C_3 = X$

Exo 4 :

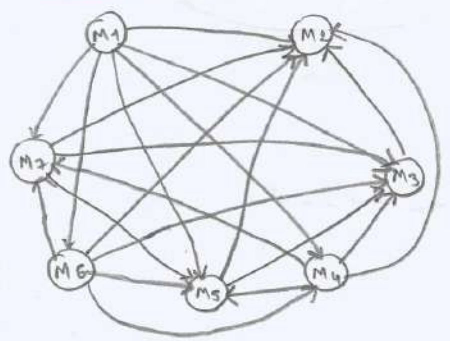


Les déplacement possible

Exo 8 :

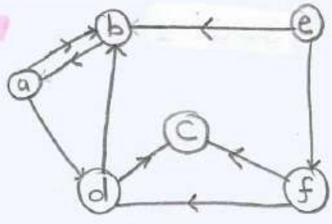
Le conseil de l'administration est composé de 7 membres (M_1 ... M_7) chacun de ces membres influences un certain membre de ses collègues conformément au tableau suivant :

Membre	Influence
M_1	M_2 ; M_3 ; M_4 , M_5 , M_6 , M_7
M_2	Aucun
M_3	M_2
M_4	M_2 ; M_3 ; M_5 , M_7
M_5	M_2 , M_3
M_6	M_2 ; M_3 , M_4 , M_5 , M_7
M_7	M_2 , M_3 , M_5

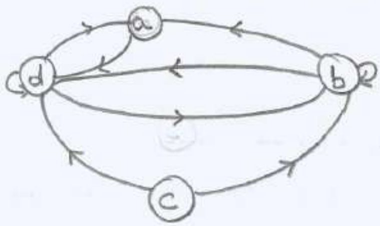


Exo 9 :

G1 :



G2 :



1 _ Matrice d'adjacence :

$$\begin{array}{c|cccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ f & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \quad M_1$$

$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 0 & 0 & 1 \\ b & 1 & 1 & 0 & 1 \\ c & 0 & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \quad M_2$$

G1 :

a/ $U^+(a)$ = successeurs de a = $\{b, d\}$

$U^-(a)$ = prédécesseurs de a = $\{b\}$

$U(a)$ = les voisins = $\{b, d\}$

$d(a) = d^+(a) + d^-(a) = |U^+(a)| + |U^-(a)|$

$= 3$ (le cardinale)

b/

* $U^+(b) = \{a\}$
* $U^-(b) = \{a, d, e\}$
* $U = \{a, d, e\}$

$d(b) = 3 + 1 = 4$

c/

$* U^+(c) = \emptyset$

$* U^-(c) = \{d, f\}$

$* U = \{d, f\}$ $* d(c) = 2$

d/

$* U^+(d) = \{b, c\}$ $* U^-(d) = \{a, f\}$

$* U = \{a\ b c f\}$ $* d(d) = 4$

e/

$* U^+(e) = \{b, f)$ $* U^+(e) = \emptyset$

$* U(e) = \{b, f\}$ $* d(e) = 2$

f/

$* U^+(f) = \{c, d\}$ $* U^-(f) = \{e\}$

$* U(f) = \{c, d, f\}$ $* d(f) = 3$

G2:

a/

$* U^+(a) = \{d\}$ $* U^-(a) = \{b, d\}$

$* U() = \{b, d\}$ $* d(a) = 1+2 = 3$

b/

$* U^+(b) = \{a, b, d\}$ $U^-(b) = \{b, c, d\}$

$* U = \{a, b, c, d\}$ $* d(b) = 3+3 = 6$

c/

$* U^+(c) = \{b, d\}$ $* U^-(c) = \emptyset$

$* U(c) = \{b, d\}$ $* d(c) = 2+0 = 2$

d/

$* U^+(d) = \{a, b, d\}$ $* U^-(d) \{a, b, c, d\}$

$U(d) = \{a, b, c, d\}$ $* d(d) = 3+4 = 7$

Exo11:

Michel est invité par André (A) à un diner de famille, Les 1er phrases que Michel (M) entend sont:

B: Bonjour je suis la mère d'A

C: Bienvenu je suis la soeur du père d'A

D: slt, je suis le fils unique de la soeur de la mère d'A

E: Bnjr, je suis l'unique Beau frère du fils de K

F: Mère de 2 filles, je suis aussi la grande mère maternelle de D

G: slt, je suis 1 des fils de L et 1 de petit fils de F

H: je suis le grand-père parternel de L

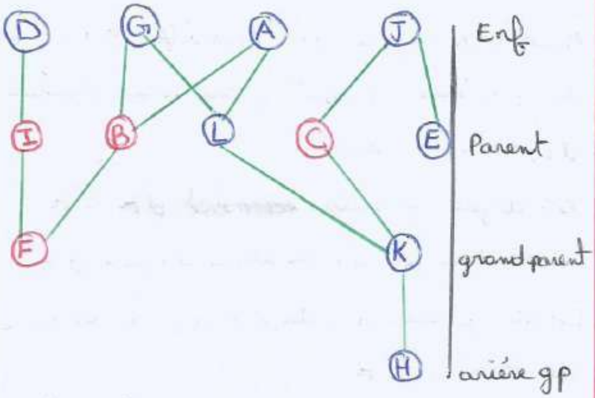
I: je suis l'unique belle-soeure de L

J: slt, je suis le ~~neveu~~ de L et le petit fils de K

K: Michel, mon petit fils m'a parlé de vous

L: Bienvenu dans cette maison je viens de vous voir parler avec mon père

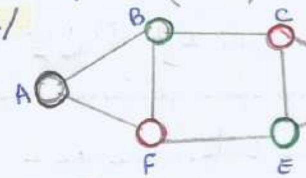
- Aider Michel à representer la situation familiale des ses en moyen d'un graphe



arête : lien de parenté parent / enfant

Exo12 : les graphes svt sont-ils planaire ou bipartie (2 colors)

1/

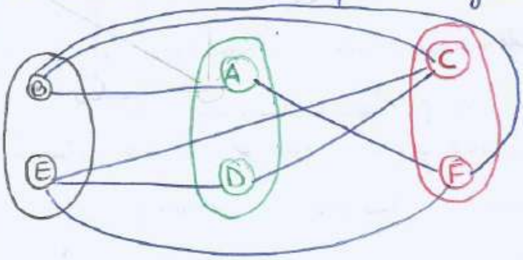


planaire

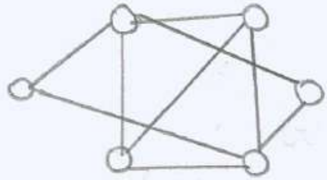
n'est pas bipartie

K-coloration :

- on commence par les sommets de plus grands degré
- on colorie les sommets qui sont adjacents



2/

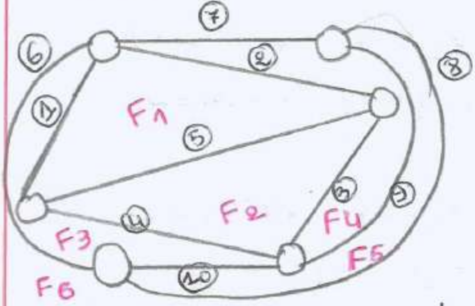


planaire :

nbr sommets + nbr face = nbr d'arêtes + 2

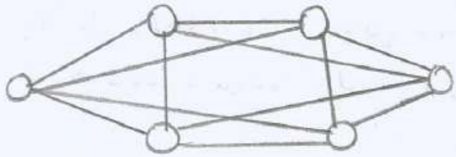
$|X| + F = |E| + 2$

$6 + 6 = 10 + 2$



planaire mais n'est pas bipartie

3/

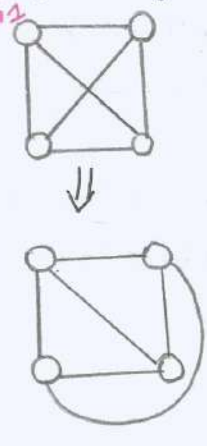


ni planaire, ni bipartie

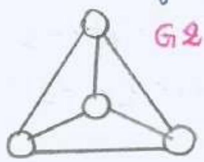
Exo13 :

indiquer le type de chacun des graphes

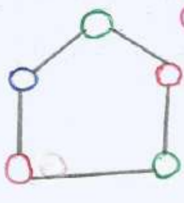
G1

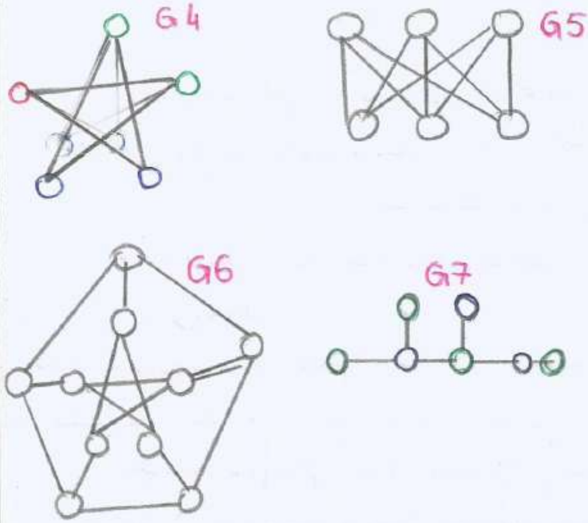


G2



G3





	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7
simple	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
complet	✓	✓	×	×	×	×	×
bipartie	×	×	×	×	✓	×	✓
planaire	✓	✓	✓	✓	×	×	✓

$G_3 = G_4$

K → complet

C → cycle

$G_1 \to K_4$

$G_2 \to K_4$

$G_3 \to C_5$

$G_4 \to$ isomorphe à G_5 (du G_3)

$G_5 \to$ cycle bipartie $C_6 \{1,3,5\}$

$G_6 \to K_{3,3}$ (Bipartie complet)

$G_7, G_9, G_{10} \to$ 3- regulier

$G_{11} \to B_{3,4}$

$G_{12} \to B_{3,4}$ (l'algo de K- couloration)

$G_{13} \to B_{2,5}$

$G_8 \to$ graphe de petorsen

Exo 10 :

1/ le graphe est connexe mais il n'est pas fortement connexe

2/ matrice d'adjacence

$$\begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$U^+(1) = \{2, 6, 7\}$

$U^+(2) = \emptyset$

$U^+(3) = \{2, 4, 6\}$

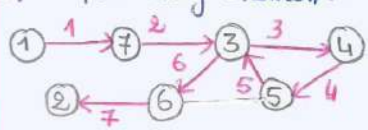
$U^+(4) = \{5\}$

$U^+(5) = \{3\}$

$U^+(6) = \{2\}$

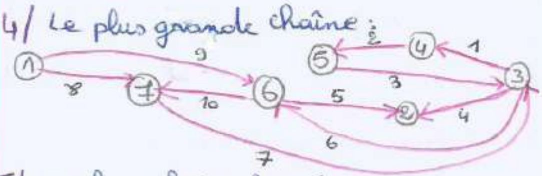
$U^+(7) = \{3, 6\}$

3/ le plus long chemin :

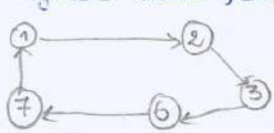


cardinalité = 7

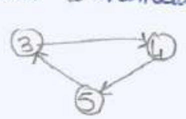
4/ Le plus grande chaîne :



5/ cycle = chaine fermé



circuit = chemaine fermé



Exo 11 :

1/ $\sum_{x \in X} d(x) = 2k$

$d(i) = d^+(i) + d^-(i)$

d'après la matrice d'adjacence (exo 10)

$\sum d(x) = 11 + 11 = 22$

car chaque arc est contabilisé 2 fois une fois pour le deg interieur et une fois pour le deg exterieur

$\sum_{x \in X} d(x) = \sum_{x \in X} d^+(x) + \sum_{x \in X} d^-(x) = k + k = 2k$

2/ soit $G = (X, U)$ une graphe simple

Mq $\exists x, y \in X$ tq $x \neq y$:

$d(x) = d(y)$

par l'absurde :

on suppose $\forall x, y \in X$ tq $d(x) \neq d(y)$

c-à-d le deg des sommets sont 2 à 2 distinct

$d(x) = i$

$i \in \{0, 1, 2 \dots n-1\}$

soit $A \in X$ tq $d(A) = 0$

$B \in X$ tq $d(B) = n-1$

càd A est un sommet isolé, il n'est relié à aucun sommet et le sommet B est relier à tous les sommets

donc contradiction

alors :

$\exists x, y \in X, x \neq y$ tq $d(x) = d(y)$

Exo 14 :

$G = (X, U)$ une graphe simple

1/ montrer que $\forall x \in X, d(x) \leq n-1$

par l'absrude

on ~~pos~~ suppose $\exists x \in X, d(x) > n-1$

$d(x) \geq n$

donc n est relié plus d'une fois à une autre sommet ce qui contredi le fait que le graphe G est un graphe simple (càd sans boucle et sans arcs multiple)

3/ Mq $\sum_{x \in X} d(x) = 2|U|$

chaque arc est compté deux fois car il possède deux extremités

4/ soit p l'ens des sommets ayant un degré impaire et soit I l'ens des sommets ayant un degré pair tq :

$P \cup I = X$ et $P \cap I = \emptyset$

Mq $|P|$ est pair

$|P| = 2k$

$\sum_{x \in X} d(x) = 2|U|$

$\sum_{x \in P \cup I} d(x) = 2|U|$

$\sum_{x \in P} d(x) + \sum_{x \in I} d(x) = 2|U|$

$\sum_{x \in P} d(x) = 2|U| - \sum_{x \in I} d(x)$

$= 2|U| - 2k'$

$\sum_{x \in P} d(x) = 2(|U| - k') = 2k''$

$\boxed{\sum_{x \in P} \underbrace{d(x)}_{\text{impair}}}$

impair

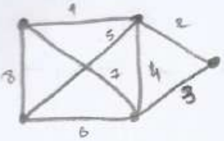
$\underbrace{d(x_1) + d(x_2) + \dots + d(x_n)}_{}$

$|p|$ pair

Exo 18 :

ce ā revien à montrer l'existance d'un chemin eulerien

càd le graphe contient 0 ou 2 sommets de degré impair



Exo 17 :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

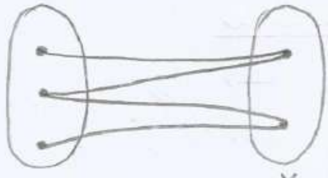
M^2 : nbr des chemins

A^2 : les chemins

$$A^3 = \begin{pmatrix} acda & aeab, abbb & abbc, aeac; & \cdots \\ bcda & \cdots & & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

Exo 15 :

G Biportie Simple :



X_1 X_2

1/ Mq : $m \leqslant \frac{n^2}{4}$

$X = X_1 \cup X_2 \qquad X_1 \cap X_2 = \emptyset$

$|X| = |X_1| + |X_2| = n$

$\forall x \in X_1 \qquad d(x) \leqslant |X_2|$

$$\sum_{x \in X_1} d(x) \leqslant \sum_{x \in X_1} |X_2|$$

$$\sum_{x \in X_1} d(x) \leqslant |X_2| \sum_{x \in X_1} 1$$

$$\sum_{x \in X_1} d(x) \leqslant |X_2| \cdot |X_1|$$

$n = \alpha + \beta \Longrightarrow \alpha . \beta \leqslant \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2}$

$$\sum_{x \in X_1} d(x) \leqslant \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2}$$

$$\sum_{x \in X_1} d(x) \leqslant \frac{n^2}{4}$$

on sait que $\sum_{x \in X} d(x) = 2m$

$$\sum_{x \in X_1 \cup X_2} d(x) = \sum_{x \in X_1} d(x) + \sum_{x \in X_2} d(x) = 2m$$

on a $\sum_{x \in X_2} d(x) = \sum_{x \in X_2} d(x) = m$

alors $m \leqslant \frac{n^2}{4}$

2/ deduire que :

$\exists x \in X$ tq $d(x) \leqslant \frac{n}{2}$

par l'absurde :

on suppose $\forall x \in X,\ d(x) > \frac{n}{2}$

$$\sum_{x \in X} d(x) > \sum_{x \in X} \frac{n}{2}$$

$2m > \frac{n}{2} \cdot n \Rightarrow 2m > \frac{n^2}{2}$

$m > \frac{n^2}{4}$ contradiction

donc $\exists x \in X$ tq $d(x) \leq \frac{n}{2}$

Serie 2

- G connexe $\Rightarrow m \geq n-1$

+

$\underbrace{\text{G sous cycle}}_{\text{acyclique}} \Rightarrow m \leq n-1$

$\Downarrow$

arbre $\Rightarrow \underbrace{m = n-1}$

minimal pour la connexité

maximal acyclique

Exo 1 :

sous graphe : 2^{eme} rep

graphe partiel : 1

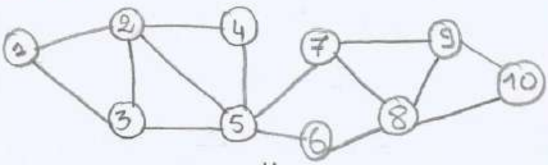
sous graphe partiel : 3

arbre couvrant : 1

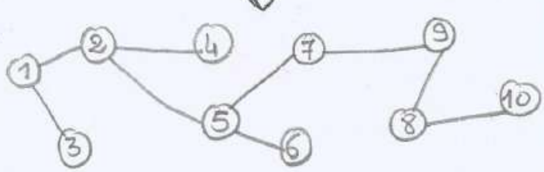
graphe planaire : 1

composante fortement connexe : 3

Exo 2 :



$\Downarrow$



graphe partiel qui est un arbre couvrant

Exo 3 :

1/ Mq : $\frac{\sum_{x \in X} d(x)}{|X|} < 2$

$|X| = n \qquad n > 1 \qquad n \geq 2$

$\sum_{x \in X} d(x) = 2m = 2(n-1)$

$\frac{2(n-1)}{n} = 2 - \frac{2}{n} < 2$ cqfd

$\frac{\sum_{x \in X} d(x)}{|X|} < 2$

2/ Mq : G un arbre $n > 1$ a au moins deux feuille

càd 2 sommets pendants par l'absurde :

on suppose qu'il n'existe aucun feuille

$\Rightarrow \forall x \in X \quad d(x) \geq 2$

$\sum_{x \in X} d(x) \geq \sum_{x \in X} 2$

$2m \geq 2m$

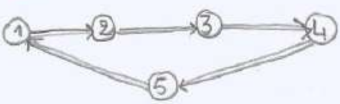
$2(n-1) \geq 2n$

$2n - 2 \geq 2n$ contradiction

alors il existe au moins 2 sommets

pen

Exo 4 :



soit T un graphe d'ordre n

① ⟹ ②

on suppose que T est un arbre et Mq

T est connexe avec n - 1 arêtes

comme T est un Arbre donc il est

sans cycles $\Rightarrow m \leq n-1$

connexe $\Rightarrow m \geq n-1$ donc $m = n-1$

alors T est connexe avec n - 1 arêtes

② ⟹ ③

on suppose que T est connexe et Possède

n - 1 arêtes , Mq la suppression d'une

arête le deconnecte .

$m = n-1$ si je supprime une arête

$m = n-2 < n-1$

le graphe se deconnecte

③ ⟹ ④

la contraposé : $\overline{④} \Rightarrow \overline{③}$

T contient un cycle ⇒ la suppression

d'une arête ne la deconnecte pas

T contient un cycle donc la suppression

d'une arête ne vaspas me deconnecter le

graphe

le graphe obten est connexe et sans

cycle donc $m = n-1$

④ ⟹ ⑤.

T acyclique ⟹ l'ajout d'1 arête le

$m = n-1$ rend cyclique

$m = n-1 \Rightarrow$ si on ajoute 1 arête $m = n > n-1$

donc T contient un cycle

⑤ ⟹ ①

T est un arbre (connexe et sans cycle)

soit x et y 2 sommet de T

. s'il ∃ une arête qui relie x à y donc

c'est une chaine de x à y

. si nous ajoutons cette arête à T nous

crayons donc un cycle de la Forme

$(x, a, \ldots, z, y, x)$

ceci montre l'existance d'une chaine

$(x, a, \ldots, z, y)$ entre x et y dans T

donc par def T est un graphe connexe

par hypothese

T est sans cycle et on a demontré

qui il est connesce donc c'est un arbre

Exo 6 :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
U_i	1 2	6 10	4 9	2 3	3 8	9 10	3 4	4 5	8 9	7 8	1 6	2 7	1 5	5 10	6 7	1 11	2 11	5 12	1 12
C_i	1	1	1	2	2	2	3	4	4	4	4	5	5	5	6	7	8	8	9

$w = \emptyset$ $i = 1$ $m = 19$

1^er itération

$U_1 \cup W$ pas de cycle

$w = w \cup U_1 = \{U_1\}$

$i = i + 1 = 2$

$m = m - 1 = 18$

$|w| = 1$

2^eme itération :

$W \cup U_2$ pas de cycle

$w = w \cup U_2 = \{U_1, U_2\}$

$i = i + 1 = 3$

$m = 17$

$|w| = 2$

9^{eme} itération :

$U_9 \cup W$ cycle

$w = w$

$i = i + 1$

$m =$

$|w| =$

$w = \{U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7, U_{10}, U_{16}, U_{18}\}$

$C = \sum_{U \in W} ((U_i)) = 1+1+1+2+3+4+4+7+8 = 35$

Exo 5 :

arbre binaire saturé :

1/ $P(i)$: le niveau i contient 2^i noeud

$P(0)$: $2^0 = 1$ le niveau 0 possede 1 noeud vrai

on suppose $P(i)$ vraie et Mq $P(i+1)$ est vraie

alors le niveau i contient 2^i noeuds

comme l'arbre est bien saturée le niveau suivant $i+1$ contient $2 \cdot 2^i$ noeuds càd , 2^{i+1} noeuds

2/ comme l'arbre est binaire saturé donc le dernier niveau i ne contient que des feuilles alors le nbr de feuille est égale au nbr noeud càd :

2^i et comme i est le dernier niveau alors $i = h$

3/ par reccurence :

. $P(h)$: $n = 2^{h+1} - 1$

. $P(0)$: $n = 2^1 - 1 = 1$ vraie

. on suppose $P(h)$ vraie et Mq $P(h+1)$ est vraie $(n = 2^{h+2} - 1)$?

comme $P(h)$ est vraie $(n = 2^{h+1} - 1)$

pour un arbre de hauteur $h+1$

$n = 2^{h+1} - 1 + 2^{h+1}$

donc $n = 2 \cdot 2^{h+1} - 1 = 2^{h+2} - 1$

4/ Mq : $h = \log_2(n+1) - 1$

on a $n = 2^{h-1} - 1$

$\Rightarrow 2^{h-1} = n + 1$

$h+1 \, Ln \, 2 = Ln \; n+1$

$\Rightarrow h+1 = \frac{Ln \; n+1}{Ln \, 2}$

$\Rightarrow h = \log_2(n+1) - 1$

5/ c'est a dire Mq : $2^h = \frac{n+1}{2}$

on a $n = 2^{h+1} - 1$

$\Rightarrow n + 1 = 2^h \cdot 2 \Rightarrow 2^h = \frac{n+1}{2}$

Exo 6 :

$F = \{1, 2, \ldots 12\}$

1^{er} itération :

$|F| = 12 > 1$

$L = \{(1,2), (3,8), (4,9), (5,4), (6,10), (7,8), (1,11), (5,12)\}$

$F = \{\{11, 1, 2\}, \{3, 8, 7\}, \{6, 10\}, \{9, 4, 5, 12\}\}$

2^{eme} iteration :

$|F| = 4 > 1$

$L = \{(2,3), (9,10)\}$

$F = \{\{11 ; 1 ; 2 ; 3 ; 8 ; 7\},$
$\{6 ; 10 ; 9 ; 4 ; 5 ; 12\}\}$

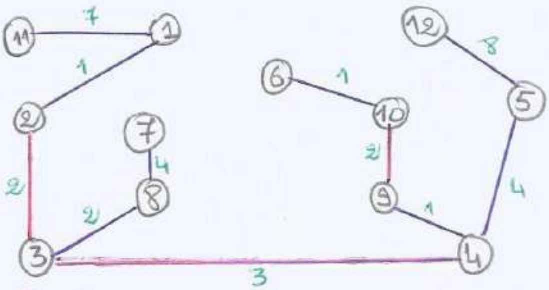
3ème itération :

$|F| = 2 > 1$

$L = \{(3;4)\}$

$F = \{\{1;2;3, --- 12\}\}$

$|F| = 1$ stop



Ex08 :

Algo de Boruvka

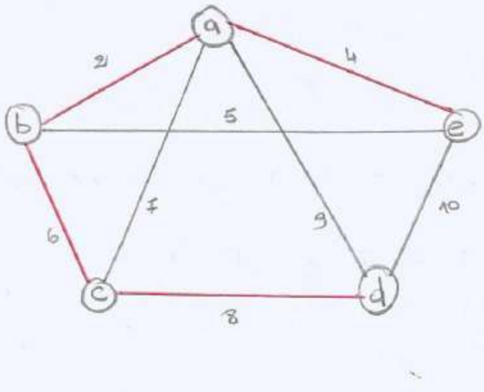
$F = \{\{a\};\{b\};\{c\};\{d\};\{e\}\}$

1er itération :

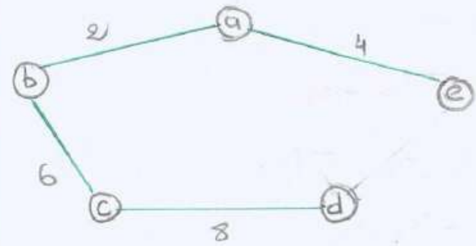
$L = \{(a;b);(c;b);(c;d);(e;a)\}$

$F = \{\{a;b;c;d;e\}\}$

$|F| = 1$ stop

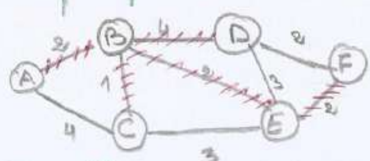


Algo Prim



Ex01 : Serie 3 :

x	$\hat{A}$	$\hat{B}$	$\hat{C}$	D	E	F
	0	∞	∞	∞	∞	∞
	0	2_A	4_A	∞	∞	∞
	0	2_A	3_B	6_B	4_B	∞
	0	2_A	3_B	6_B	4_B	∞
	0	2_A	3_B	6_B	4_B	6_E
	0	2_A	3_B	6_B	4_B	6_E



Algorithme de Dijkstra :

initialisation : choisir le sommet

$A \rightarrow \underbrace{\pi(A) = 0}_{\text{distance}}$

chercher les voisins de A (pas dans S)

$\forall x \in X - \{A\} \rightarrow \pi(x) = \infty$

$S = \{A\}$

1er itération :

$\pi(B) = 2A$

$B \rightarrow D(B) = \pi(A) + d(A,B) = 0 + 2 = 2 <$

comparer avec la valeur dans le tableau et choisir le min

$C \rightarrow D(C) = \pi(A) + d(A,C) = 0 + 4 = 4 <$

$\pi(C) = 4A$

2ème I :

$\min \pi(x) = 2 \rightarrow x = B \rightarrow S = \{A, B\}$

$x \in X - S$

les voisins de B qui $\notin$ à S

$C \to D(C) = \pi(B) + d(B,C) =$

$2+1 = 3_B < 4_A$

$\pi(C) = 3_B$

$D \to D(D) = \pi(B) + d(B,D) =$

$2+4 = 6_B < \infty$

$\pi(D) = 6_B$

$E \to D(E) = \pi(B) + d(B,E) = 2+2$

$= 4_B < \infty$

$\pi(E) = 4_B$

3ème I :

$\min \pi(x) = 3 \to x = C \to S = \{A, B, C\}$

$x \in X - S$

les voisins de c qui $\notin$ à S

$E \to D(E) = \pi(c) + d(c,E) =$

$3+3 = 6_C > 4_B$

4eme I :

$\min \pi(x) = 4 \to x = E \to S = \{A, B, C, E\}$

$D \to D(D) = \pi(E) + d(E,D) = 4+3 = 7_E > 6_B$

$F \to D(F) = \pi(E) + d(E,F) = 4+2 = 6_E < \infty$

$\pi(F) = 6_E$

5ème I :

$\min \pi(x) = 6 \to x = D \to S$

$S \{A, B, C, E, D\}$

$x \in X - S$

$F \to D(F) = \pi(D) + d(D,F) =$

$6+2 = 8$

tout les couples de sommet $\Rightarrow$

Algorithme de dantzing

Algorithme de Bellman

la liste des arrêtes :

AB, AC

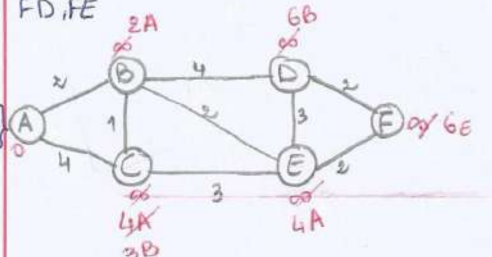
BA, BC, BD, BE,

CA, CB, CE.

DB, DE, DF

EB, EC, ED, EF

FD, FE



$AB \to D(B) = \pi(A) + d(A,B) = 0+2 = 2_A$

$AC \to D(C) = \pi(A) + d(A,C) = 0+4 = 4A$

$BA \to D(A) = \pi(B) + d(B,A) = 2+2 = 4 > 0$

Il n'y a pas d'amélioration

$BC \to D(C) = \pi(B) + d(B,C) = 2+1$

$= 3_B < 4_A$

Il n'y a pas d'amélioration

$BD \to D(D) = \pi(B) + d(B,D) = 2+4 = 6 < \infty$ oui

$BE \to D(E) = \pi(B) + d(B,E) = 2+2 < \infty$ oui

$CA \to D(A) = \pi(C) + d(C,A) = 3+4$

$= 7 > 3$ non

$CB \rightarrow D(B) = \pi(C) + d(C,B) =$

$3 + 1 = 4_C > 2_A$ non

$CE \rightarrow D(E) = \pi(C) + d(C,E) =$

$3+3 = 6_C > 4_B$ NON

$DB \rightarrow D(B) = \pi(D) + d(B,B) =$

$6 + 4 = 10$ NON

$DE \rightarrow D(E) = \pi(D) + d(D+E) =$

$6 + 3 = 9 \cancel{>} 4_B$

$DF \rightarrow D(F) = \pi(D) + d(D,F) =$

$6 + 2 = 8_D < \infty$

$\left.\begin{array}{l} EB \\ EC \\ ED \end{array}\right\}$ NON

$EF \rightarrow D(F) = \pi(E) + d(E,F) =$

$4 + 2 = 6_E < 8_D$ oui

$\left.\begin{array}{l} FD \\ FE \end{array}\right\}$ NON

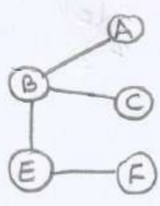
2ème I :

$AB \rightarrow D(B) = \pi(A) + d(A,B) =$

$0 + 2 = 2A$ NON

- pas d'amelioration "STOP"

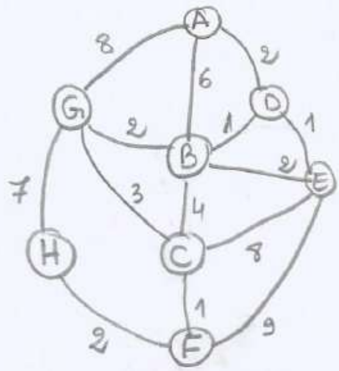
donc l'arbre de plus court chemin est :



djikstra {1 sommet avec tout les}

Exo2 :

les distances positif et NULL



l'arbre courant minimum

Algorithme de djistra :

A	B	C	D	E	F	G	H
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0	6A	∞	2A	∞	∞	8A	∞
0	3D	∞	2A	3D	∞	8A	∞
0	3D	7B	2A	3D	∞	5B	∞
0	3D	7B	2A	3D	12E	5B	∞
0							
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Exo8 : Algo de Dantzig

1er I :

K=0 on choisit le sommet A

$D^{(0)} = [0]$ $\quad P^{(0)} = [A]$

dist $\quad$ pred

2ème I :

K = 1 on ajoute le sommet B $\quad$ prédécesseur de point d'arrivée

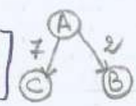
pas de boucle

$$D^{(1)} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \infty & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad P^{(1)} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} A & A \\ O & B \end{bmatrix} \end{array}$$

3ème I :

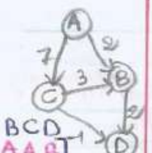
K=2 on ajoute le sommet C

$$D^{(2)} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ \infty & 0 & \\ \infty & & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad P^{(2)} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} A & A & A \\ O & B & O \\ O & C & C \end{bmatrix} \end{array}$$



4ème I :

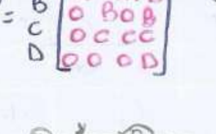
K = 3 on ajoute le sommet D :



$$D^{(3)} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & 4_B \\ \infty & 0 & \infty & 2 \\ \infty & 3 & 0 & -1 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad P^{(3)} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} A & A & A & B \\ O & B & O & B \\ O & C & C & C \\ O & O & O & D \end{bmatrix} \end{array}$$

5ème I :

K = 4 on ajoute le sommet E :



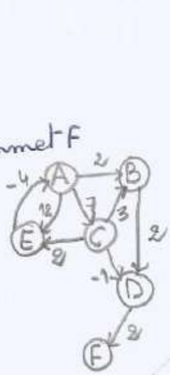
$$D^{(4)} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & 4_B & 9_C \\ \infty & 0 & \infty & 2 & \infty \\ -2_E & 0_A & 0 & -2 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ -4 & -2_A & 3_A & 0_B & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

puisque $9 < 12$

$$P^{(4)} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{bmatrix} A & A & A & B & C \\ O & B & O & B & O \\ E & A & C & C & C \\ O & O & O & D & O \\ E & A & A & B & E \end{bmatrix} \end{array}$$

6ème I : K = 5 on ajoute le sommet F

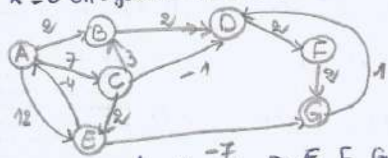
$$D^{(5)} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & 4_B & 9_C & 6 \\ \infty & 0 & \infty & 2 & \infty & 4 \\ -2_E & 0_A & 0 & -2 & 2 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 2 \\ -4 & -2_A & 3_A & 0_B & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



$$P^{(5)} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} & \begin{bmatrix} A & A & A & B & C & D \\ O & B & O & B & O & D \\ E & A & C & C & C & D \\ O & O & O & D & O & D \\ E & A & A & B & E & D \\ O & O & O & O & O & F \end{bmatrix} \end{array}$$

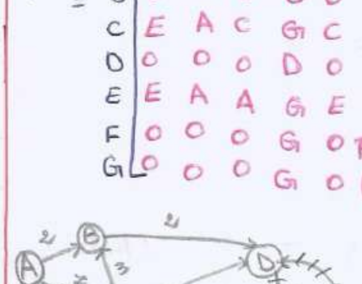
7ème I :

K = 6 on ajoute le sommet G



$$D^{(6)} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & 3_G & 9_C & 5_D & 2_E \\ \infty & 0 & \infty & 2 & \infty & 4_D & 6_F \\ -2_E & 0_A & 0 & -4_G & 2 & -2_D & -5_E \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 2 & 4 \\ -4 & -2_A & 3_A & -6_G & 0 & -4_D & -7 \\ \infty & \infty & \infty & 3_G & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 0 & 3_D & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$P^{(6)} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{array} & \begin{bmatrix} A & A & A & G & C & D & E \\ O & B & O & B & O & D & F \\ E & A & C & G & C & D & E \\ O & O & O & D & O & D & D \\ E & A & A & G & E & D & E \\ O & O & O & G & O & F & F \\ O & O & O & G & O & D & G \end{bmatrix} \end{array}$$



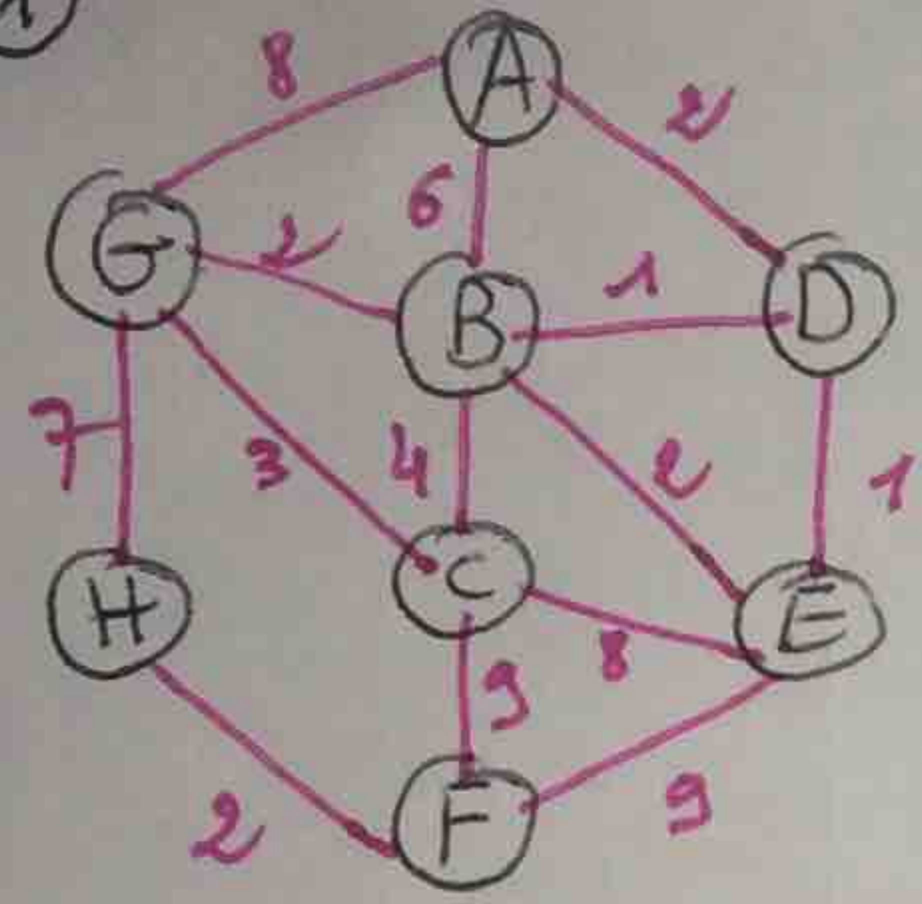
– le plus court chemin entre (A, F)

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\ A & \begin{bmatrix} A & A & A & G & C & D & E \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{ccccccc} 6 & & 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{array} \end{array}$$

Serie n°3

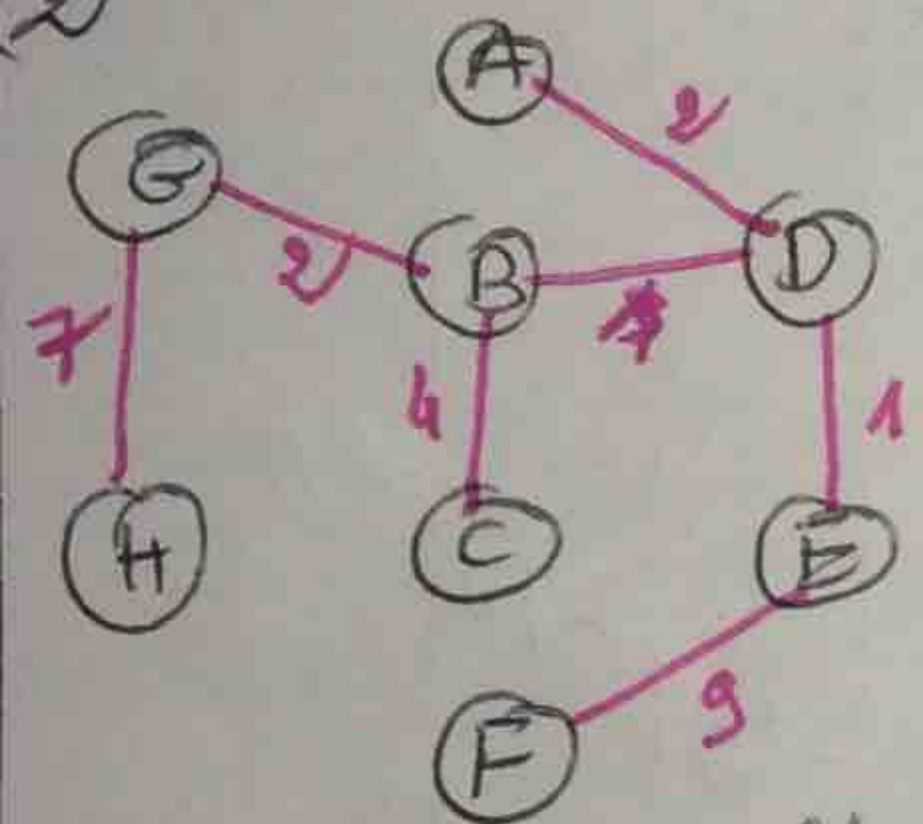
Exercice 2 :

1



$\pi(x)$ \ x	$\hat{A}$	$\hat{B}$	$\hat{C}$	$\hat{D}$	$\hat{E}$	$\hat{F}$	$\hat{G}$	H
	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	0	6_A	∞	2_A	∞	∞	8_A	∞
	0	3_D	∞	2_A	3_D	∞	8_A	∞
	0	3_D	7_B	2_A	3_D	∞	5_B	∞
	0	3_D	7_B	2_A	3_D	12_E	5_B	∞
	0	3_D	7_B	2_A	3_D	12_E	5_B	12_G
	0	3_D	7_B	2_A	3_D	12_E	5_B	12_G
	0	3_D	7_B	2_A	3_D	12_E	5_B	12_G
	A	B	C	D	E	F	G	H

2



3 Appliquer l'algo de Dantzig.

5 " l'algo de Kruskal (ou Boruvka)

Exercice 3

l'algorithme approprié est celui de Bellman

la liste des arêtes :

AB, AD, CA, CD, DE, DF, EC, EH, FB, FE, GE, HF, HG.

1ere itération

	A	B	C	D	E	F	G	H
	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
AB	0	4_A						
AD				4_A				
DE					8_D			
DF						2_D		
EC			3_E					
EH								0_E
CA								
CD								
FB								
FE					-1_F			
~~GA~~ HG							2_H	
HF								
~~A~~ GE					0_G			

2e itération

	A	B	C	D	E	F	G	H
	0	4_A	3_E	4_A	0_G	2_D	2_H	0_E
AB		4A						
AD								
DE								
DF								
EC			1_E					
EH								$-2E$
CA								
CD								
FB								
FE					-1_F			
HG								
HF								
GE								

3e itération

	A	B	C	D	E	F	G	H
	0	4_A	1_E	4_A	-1_F	2_D	2_H	$-2E$
AB								
AD								
DE								
DF								
EC			0_E					
EH								-3_E
CA								
CD				2C				
FB								
FE								
HG							~~AH~~	
HF						$-1H$		
GE					$-3G$			

* l'itération 7 doit être la dernière

$$7 = |X| - 1 = n - 1$$

~~xx~~ on fait une itération de plus pour vérifier l'existance d'un circuit absorbant

* la 8e itération améliore les distances càd il existe un circuit absorbant dans le graphe

EXO5)

$W = \{s, 1, 2, 5, 4, 3$

s	1	2	3	4	5	6
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0	3_s	4_s	∞	∞	∞	∞
0	3_s	4_s	∞	6_1	5_1	∞
0	3_s	4_s	7_2	6_1	5_1	7_4
0	3_s	5_s	7_2	6_1	5_1	7_4
s	1	2	3	4	5	6