Théorie des Graphes - TD n°1

Exercice 1

Trois professeurs P_1, P_2 et P_3 devront donner le même jour un certain nombre d'heures de cours à trois classes C_1, C_2 et C_3, tel que :

- P_1 doit donner 2 heures de cours à C_1 et 1 heure à C_2 ;
- P_2 doit donner 1 heure de cours à C_1, 1 heure à C_2 et 1 heure à C_3 ;
- P_3 doit donner 1 heure de cours à C_1, 1 heure à C_2 et 2 heures à C_3.

Questions :

1. Comment représenter cette situation par un graphe ?
2. Quel type de graphe obtenez-vous ? Donner sa matrice d'adjacence
3. Combien faudra-t-il de plages horaires au minimum ?
4. Aidez-vous du graphe pour proposer un horaire pour ces professeurs.

Exercice 2

Six colis de poids respectifs 200kg, 500kg, 300kg, 600kg, 100kg, et 400kg arrivent, dans cet ordre chronologique, vers une trémie de distribution. Indiquez le nombre minimum de fourgons nécessaires pour distribuer ces colis, sachant que :

- ces colis doivent être chargés dans l'ordre chronologique de leurs arrivées ;
- un colis de poids supérieur ne peut être superposé sur un colis de poids inférieur.

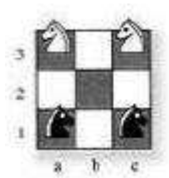
Exercice 3

Un tournoi d'échecs oppose 6 personnes. Chaque joueur doit affronter tous les autres.

1. Construisez un graphe représentant toutes les parties possibles.
2. Quel type de graphe obtenez-vous ? Donner sa matrice d'adjacence
3. Si chaque joueur ne joue qu'un match par jour, combien de jours faudra-t-il pour terminer le tournoi ?
4. Aidez-vous du graphe pour proposer un calendrier des matches.

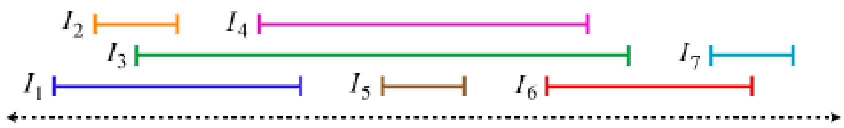
Exercice 4

Sur un échiquier 3×3, les deux cavaliers noirs sont placés sur les cases a_1 et c_1, les deux cavaliers blancs occupant les cases a_3 et c_3. Aidez-vous d'un graphe pour déterminer les mouvements alternés des blancs et des noirs qui permettront aux cavaliers blancs de prendre les places des cavaliers noirs, et vice versa. Les blancs commencent.



Exercice 5

Soient $I_1 \ldots I_n$ des intervalles de la droite réelle.



Un *graphe d'intervalles* est composé des sommets *1…n*, tel que il y a une arête entre un sommet *i* et *j* si $I_i \cap I_j = \emptyset$, autrement dit les intervalles I_i et I_j ne se chevauchent pas.

1. Donnez le graphe d'intervalles des intervalles ci-dessus.
2. Quel type de graphe obtenez-vous ?
3. Donnez les différentes représentations informatiques de ce graphe.

Exercice 6

Michel est invité par André (A) à un dîner de famille. Les premières phrases que Michel entend sont :

1) Béatrice (B) : « Bonjour ! Je suis la mère d'André »
2) Carole (C) : « Bienvenue ! Je suis la sœur du père d'André »
3) Daniel (D) : « Salut ! Je suis le fils unique de la sœur de la mère d'André »
4) Emile (E) : « Bonjour ! Je suis l'unique beau-frère du fils de Karl »
5) Fabienne (F) : « Mère de deux filles, je suis aussi la grand-mère maternelle de Daniel »
6) Gaston (G) : « Salut ! Je suis un des fils de Lucien et un des petits-fils de Fabienne »
7) Honoré (H) : « Je suis le grand-père paternel de Lucien »
8) Irène (I) : « Je suis l'unique belle-sœur de Lucien »
9) Joseph (J) : « Salut ! Je suis le neveu de Lucien et le petit fils de Karl »
10) Karl (K) : « Mon petit-fils m'a parlé de vous »
11) Lucien (L) : « Bienvenue dans cette maison ; je vous ai vu à l'instant parlé avec mon père »

Aidez Michel à représenter la situation familiale de ses hôtes au moyen d'un graphe.

Exercice 7

L'inspecteur Homes et son ami Watson enquêtaient sur l'affaire de l'explosition d'une bombe dans un château qui a causé la mort de son propriétaire. Les sept ex-épouses du propriétaire interrogées par Watson ont répondu comme suit :

1) Ann (A) a rencontré Betty (B), Charlotte (C), Félicia (F) et Georgia (G).
2) Betty a rencontré Ann, Charlotte, Edith (E), Félicia et Helen (H).
3) Charlotte a rencontré Ann, Betty et Edith.
4) Edith a rencontré Betty, Charlotte et Félicia.
5) Félicia a rencontré Ann, Betty, Edith et Helen.
6) Georgia a rencontré Ann et Helen.
7) Helen a rencontré Betty, Félicia et Georgia.

L'inspecteur Homes pense que l'épouse qui a déposé la bombe est celle qui a passé le plus de temps dans le château. Aidez-vous d'un graphe pour déterminer le coupable.

Exercice 8

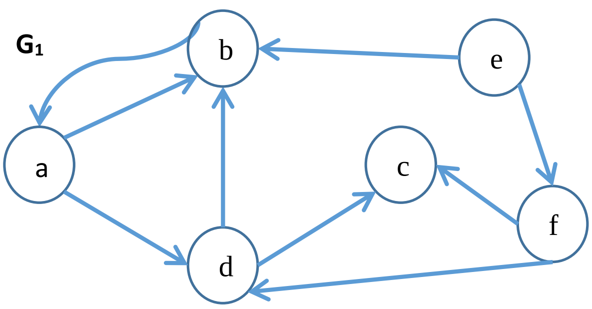
Le conseil d'une administration est composé de 7 membres $M_1, \ldots, M_7$. Chacun de ces membres influence un certain nombre de ses collègues, conformément au tableau suivant :

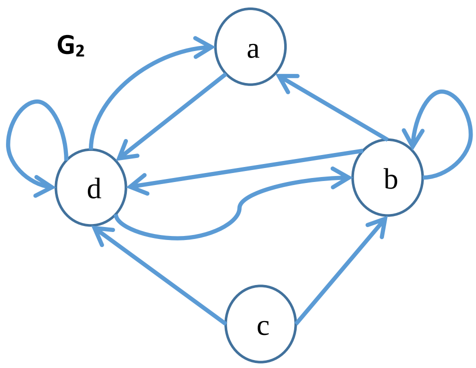
Membre	Influence
M_1	$M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7$.
M_2	Aucun
M_3	M_2
M_4	M_2, M_3, M_5, M_7
M_5	M_2, M_3
M_6	M_2, M_3, M_4, M_5, M_7.
M_7	M_2, M_3, M_5.

Modéliser cette situation sous forme d'un graphe.

Exercice 9

Soient les graphes suivants :



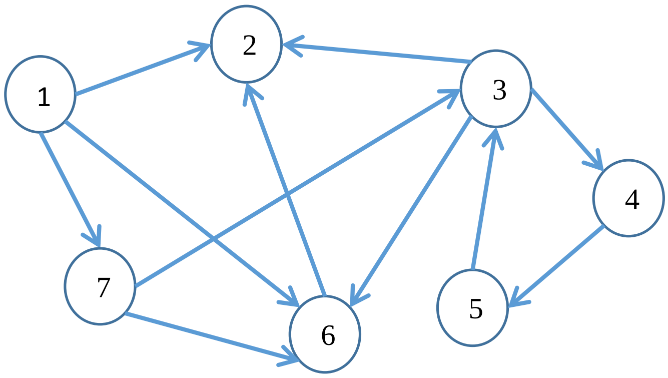


1. Donnez leurs matrices d'adjacence, et listes d'arcs
2. Donnez la liste des prédécesseurs, successeurs, voisins et degrés de chaque sommet.
3. Etudiez les propriétés de ces graphes (symétrie, connexité, forte connexité, circuits, etc)

Exercice 10

Soit le graphe ci-contre :

1. Etudiez les propriétés de ce graphe (symétrie, connexité, forte connexité, etc).
2. Représentez ce graphe sous forme d'une matrice d'adjacence, indiquez l'ensemble des successeurs de chaque sommet.
3. Retrouvez le plus long chemin simple de G, indiquez sa cardinalité.
4. Retrouvez la plus grande chaîne simple de G, indiquez sa cardinalité.
5. Testez l'existence de circuits et cycles dans ce graphe G.

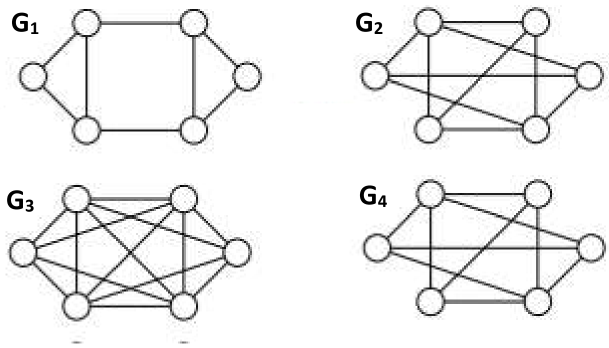


Exercice 11

1. Montrez que la somme des degrés des sommets de n'importe quel graphe fini est paire.
2. Montrez que n'importe quel graphe simple possède deux sommets de même degré.

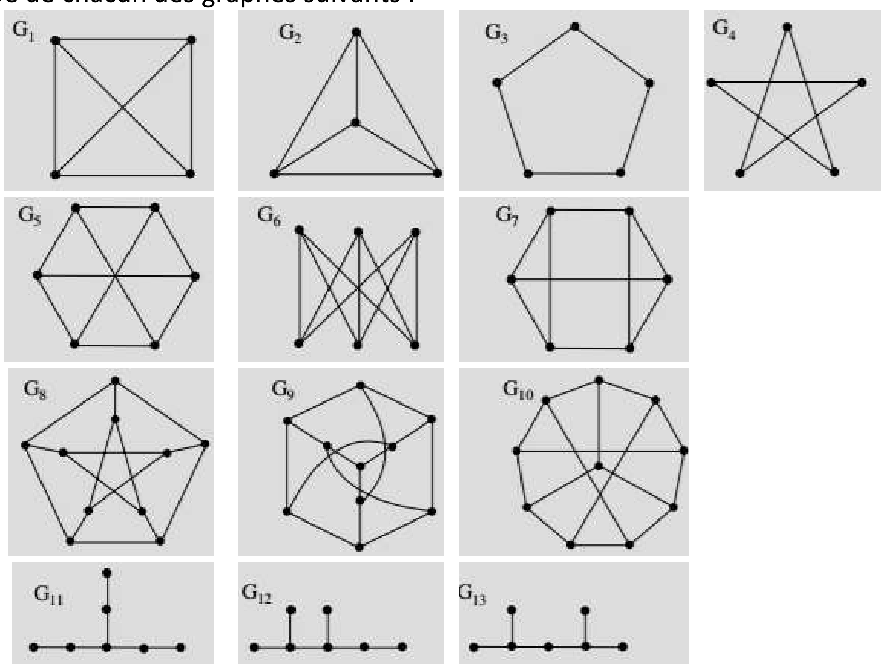
Exercice 12

Est-ce que les graphes suivants sont planaires ou bipartis ?



Exercice 13

Indiquez le type de chacun des graphes suivants :



Exercice 14

Soit $G = (X, U)$ un graphe simple d'ordre $n = |X|$.

1. Montrez que $\forall x \in X,\ d(x) \leq n - 1$.
2. Montrez qu'il ne peut y avoir dans G à la fois deux sommets x et y tel que $d(x) = 0$ et $d(y) = n - 1$.
3. Montrez que $\sum_{x \in X} d(x) = 2|U|$.
4. Montrez que G a un nombre pair de sommets ayant des degrés impairs.

Exercice 15

Soit $G = (X, U)$ un graphe simple biparti d'ordre $n = |X|$ et de taille $m = |U|$.

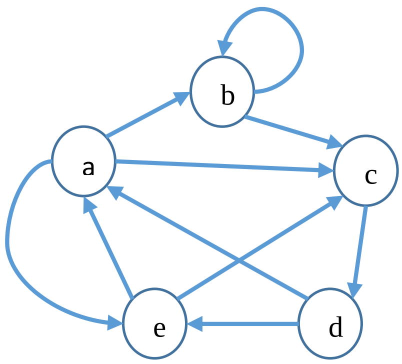
1. Montrez que $m \leq n^2/4$.
2. En déduire qu'il existe un sommet x tel que $d(x) \leq n/2$.

Exercice 16

Démontrez que si deux sommets x et y appartiennent à une même composante fortement connexe C, alors tout chemin de x à y est entièrement inclus dans C.

Exercice 17

A) Soit le graphe ci-dessous, dont la matrice d'adjacence M et la *matrice des arcs* A sont données :



$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} \emptyset & ab & ac & \emptyset & ae \\ \emptyset & bb & bc & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & cd & \emptyset \\ da & \emptyset & \emptyset & \emptyset & de \\ ea & \emptyset & ec & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix}.$$

a) Calculer le produit matriciel classique $M^2 = M \times M$.

b) Définissons le produit matriciel spécial $A^2 = A \otimes A$ par :

- *la loi de multiplication est remplacée par la concaténation de deux arcs (puis de deux chemins) dont l'extrémité terminale du premier est l'extrémité initiale du second, par exemple : (ab).(bc)=(abc) ; (ae).(cd)=ф ; (abc)(cd)=(abcd).*
- *la loi d'addition est remplacée par la réunion ensembliste, par exemple, l'addition des deux chemins (abc) et (aec) consiste à mettre ces deux chemins dans la même case de la nouvelle matrice.*

Vérifiez le produit suivant :

$$A^2 = A \otimes A = \begin{bmatrix} \emptyset & ab & ac & \emptyset & ae \\ \emptyset & bb & bc & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & cd & \emptyset \\ da & \emptyset & \emptyset & \emptyset & de \\ ea & \emptyset & ec & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \emptyset & ab & ac & \emptyset & ae \\ \emptyset & bb & bc & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & cd & \emptyset \\ da & \emptyset & \emptyset & \emptyset & de \\ ea & \emptyset & ec & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aea & abb & abc, aec & acd & \emptyset \\ \emptyset & bbb & bbc & bcd & \emptyset \\ cda & \emptyset & \emptyset & \emptyset & cde \\ dea & dab & dac, dec & \emptyset & dae \\ \emptyset & eab & eac & ecd & eae \end{bmatrix}$$

c) Vérifiez que chaque valeur $m_{ij}{}^2$ de M^2 représente le nombre de chemins de longueur 2 (c-à-d ayant 2 arcs) entre les sommets *i* et *j*.

d) Calculez le produit matriciel $M^3 = M^2 \times M$.

e) Calculez le produit matriciel $A^3 = A^2 \otimes A$

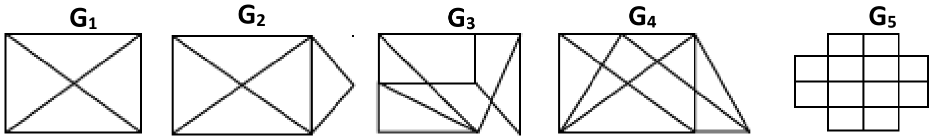
f) Vérifiez que chaque valeur $m_{ij}{}^3$ de M^3 représente le nombre de chemins de longueur 3 entre les sommets *i* et *j*.

B) Considérons le cas général d'un graphe $G = (X, U)$ avec une matrice d'adjacence M. Montrez que la valeur $m_{ij}{}^k$ de la matrice M^k indique le nombre de chemins de longueur *k* entre les sommets *i* et *j*.

Exercice 18

Est-il possible de tracer les figures suivantes sans lever le crayon et sans passer deux fois sur le même trait ?

G_1 G_2 G_3 G_4 G_5



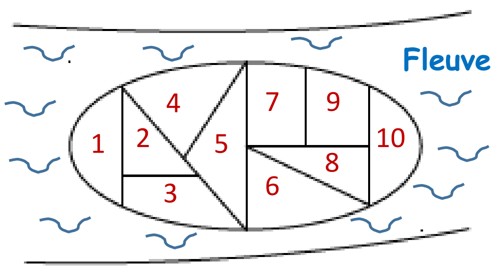
Théorie des Graphes - TD n°2

Exercice 1

1. Qu'est qu'un **sous graphe** ?
   ☐ Le graphe initial privé de quelques arêtes
   ☐ Le graphe initial privé de quelques nœuds et des arêtes qui lui sont adjacentes
   ☐ C'est un graphe privé de quelques nœuds et des arêtes qui lui sont adjacentes que l'on prive en suite de quelques arêtes.
2. Qu'est qu'un **graphe partiel** ?
   ☐ Le graphe initial privé de quelques arêtes
   ☐ Le graphe initial privé de quelques nœuds et des arêtes qui lui sont adjacentes
   ☐ C'est un graphe privé de quelques nœuds et des arêtes qui lui sont adjacentes que l'on prive en suite de quelques arêtes.
3. Qu'est qu'un **sous graphe partiel** ?
   ☐ Le graphe initial privé de quelques arêtes
   ☐ Le graphe initial privé de quelques nœuds et des arêtes qui lui sont adjacentes
   ☐ C'est un graphe privé de quelques nœuds et des arêtes qui lui sont adjacentes que l'on prive en suite de quelques arêtes.
4. Qu'est-ce qu'un **arbre couvrant** ?
   ☐ Un graphe partiel qui est un arbre
   ☐ Un sous graphe qui est un arbre
   ☐ Un sous graphe partiel qui est un arbre.
5. Qu'est-ce qu'un **graphe planaire** ?
   ☐ Un graphe situé dans un plan et dont aucune des arêtes ne se coupe, ni se superpose
   ☐ Un graphe situé sur un plan et dont on peut dessiner d'un coup les contours sans lever une seule fois le crayon
   ☐ Un graphe formé par la projection sur un plan d'un graphe en 3D
6. Une **composante fortement connexe** d'un graphe est :
   ☐ Un graphe partiel fortement connexe
   ☐ Un sous graphe connexe
   ☐ Un sous graphe fortement connexe

Exercice 2

Une ile entourée d'un fleuve est consacrée à la culture du riz, cette ile est constituée de 10 parcelles (ou champs) entourées de murs et disposées de la façon suivante :



La culture du riz suppose que l'on puisse périodiquement inonder l'ensemble des champs. Cela est réalisé en ouvrant des vannes placées dans les murs séparant les champs et le fleuve ou les champs entre eux. Etant donné que l'installation d'une vanne est couteuse, il s'agit de déterminer le nombre minimum de vannes et leur emplacement pour pouvoir, quand on le désire, inonder tous les champs.

Exercice 3

Montrer que :

1. la moyenne des degrés des sommets d'un arbre est strictement inferieure à 2 ;
2. un arbre d'ordre n, avec $n > 1$, a au moins deux feuilles.

Exercice 4

Démontrer le théorème suivant :

Pour un graphe T d'ordre n, il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

1. T est un arbre.
2. T est un graphe connexe à n-1 arêtes.
3. T est connexe, et la suppression de toute arête le déconnecte.
4. T est acyclique à n-1 arêtes.
5. T est acyclique, et l'ajout de toute arête le rend cyclique.

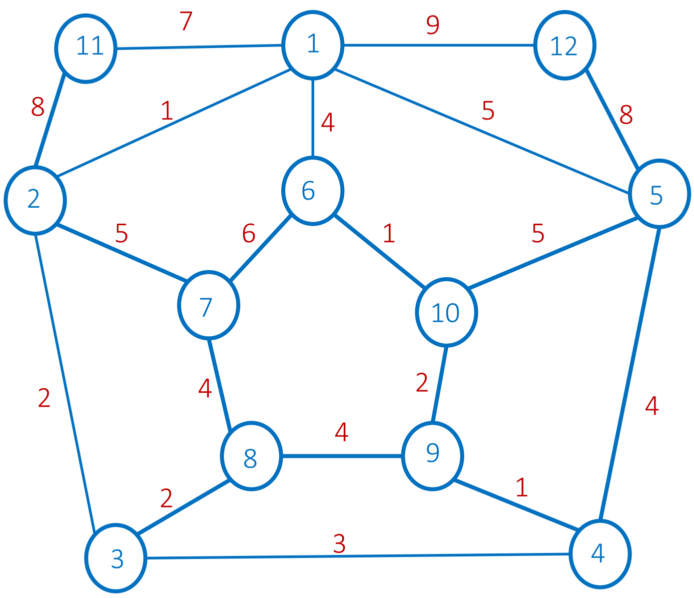
Exercice 5

Considérons un arbre binaire saturé (c.-à-d. chaque sommet possède exactement deux descendants, sauf les feuilles) de hauteur h. Démontrer les propriétés suivantes :

1. Le niveau *i*, $i \geq 0$, contient 2^i nœuds.
2. Le nombre de feuilles est égal à 2^h
3. Le nombre de nœuds est égal à $n = 2^{h+1} - 1$
4. La hauteur est égale à $h = \log_2(n+1) - 1$
5. Le nombre de feuilles est égal à $(n+1)/2$

Exercice 6

Déterminer un arbre couvrant de poids minimum du graphe suivant à l'aide des algorithmes de Kruskal et Boruvka (Sollin) :



Exercice 7

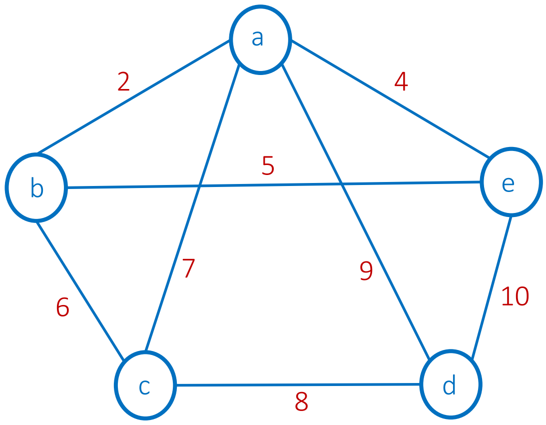
Considérons un ensemble de 5 villes. Le coût de construction d'une route entre la ville *i* et la ville *j* est a_{ij} ; les valeurs des a_{ij} sont données dans la matrice $A = [a_{ij}]$ suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 11 & 9 \\ 3 & 0 & 3 & 9 & 8 \\ 5 & 3 & 0 & +\infty & 10 \\ 11 & 9 & +\infty & 0 & 7 \\ 9 & 8 & 10 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Trouver le réseau de routes de cout minimum qui permettra de connecter toutes ces villes.

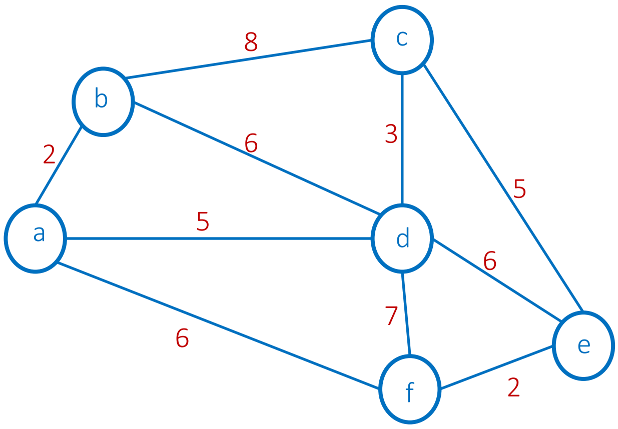
Exercice 8

Utiliser les algorithmes de Boruvka et Prim pour retrouver des arbres couvrant de poids minimum du graphe suivants :



Exercice 9

Utiliser les algorithmes de Kruskal et Prim pour retrouver des arbres couvrant de poids minimum du graphe suivant :



Exercice 10

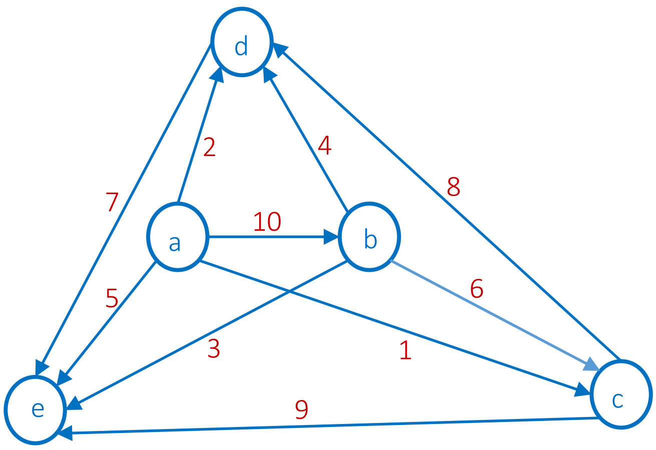
a) Soit $u \in U$ une arête d'un graphe $G = (X, U, W)$. Est-ce qu'il est toujours possible de construire un arbre couvrant de poids minimum contenant l'arête u ?

b) Soit $u \in U$ une arête de poids minimum dans un graphe G. Démontrer que u appartient à un arbre couvrant de poids minimum du graphe G.

c) Soit T un arbre couvrant de poids minimum d'un graphe G. Soit X' un sous ensemble de X, et G' le sous graphe engendré par les sommets de X'. Soit T' un sous graphe de T induit par les sommets de X'. Montrer que T' est un arbre couvrant de poids minimum de G'.

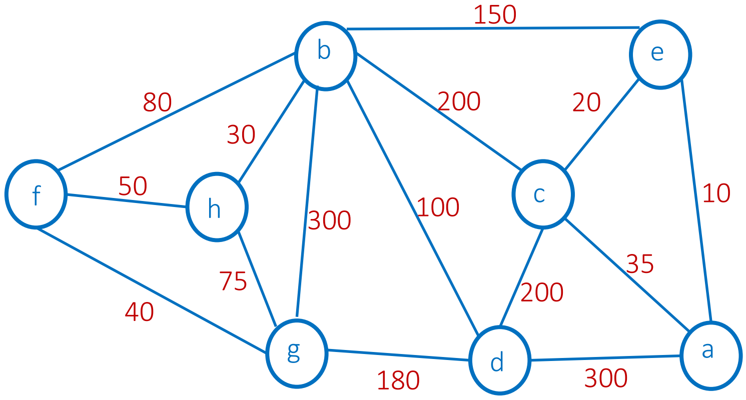
Exercice 11

Retrouver un arbre couvrant de <u>poids maximum</u> du graphe suivant à laid de l'algorithme de Kruskal :



Exercice 12

Utiliser les algorithmes de Kruskal, Boruvka et Prim pour retrouver des arbres couvrants de poids minimum du graphe suivant :

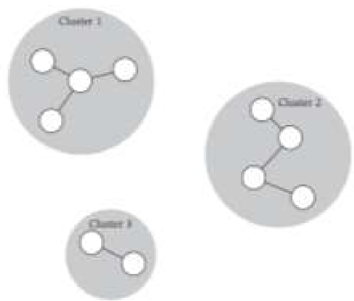


Exercice 13

Soit G un graphe non orienté et valué, toutes ces arêtes portent des valeurs distinctes (tout couple d’arêtes ont des poids différents). Montrer que dans ce cas l’arbre couvrant minimum est unique.

Exercice 14

On a n sites localisés sur un plan. On représente ces sites par des sommets et les distances qui les séparent par des arêtes entre tout couple de sites. Dans certaines situations pratiques, on demande de regrouper ces sites sous forme de *clusters* de telle sorte que dans chaque cluster il y aura les sites les plus proches entre eux, et les sites éloignés l’un de l’autre seront dans des clusters différents ; ceci est appelé problème de *clustering*.

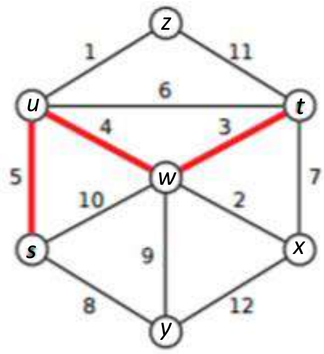


Une façon de construire ces clusters est d’exécuter l’algorithme de Kruskal, puis de l’arrêter avant que l’arbre couvrant ne soit retrouvé, par exemple on peut l’arrêter lorsque k arêtes sont ajoutées à l’arbre. Dans ce cas,

a) combien de composantes connectées (clusters) a-t-on obtenues ?
b) que peut-on dire des distances séparant les sites de clusters différents ?

Exercice 15

Considérons un réseau routier décrit par un graphe G non orienté et valué. Un camion dont la charge en tonnes dépasse le poids d’une arête *(a,b)* ne sera pas autorisé à traverser cette arête. Il s’agit d’un *problème d’étranglement*.



On considère un chemin entre deux sommets s et t. Définissons ce qui suit :

1) La *longueur d’étranglement* de ce chemin est le poids de l’arête maximale ; sur le chemin en gras du graphe opposé, l’arête d’étranglement est (s,u) de poids 5.

2) La *distance d’étranglement* entre s et t est le minimum des longueurs d’étranglement de tous les chemins liant s à t. S’il n’y a aucun chemin entre s et t, la distance d’étranglement entre eux est ∞.

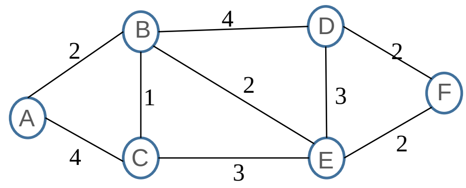
Décrire un algorithme permettant de retrouver les distances d’étranglement entre toute paire de sommets du graphe G. On suppose que toutes les arêtes sont de poids différents.

Théorie des Graphes - TD n°3

Exercice 1

Soit le graphe opposé.

1. Utiliser l'algorithme de Dijkstra pour retrouver les plus courts chemins entre le sommet A et les autres sommets du graphe.
2. Idem en utilisant l'algorithme de Bellman.
3. Utiliser l'algorithme de Dantzig pour retrouver les plus courts chemins entre tous les couples de sommets du graphe.



Exercice 2

Un réseau aérien relie 8 villes A, B, C, D, E, F, G et H. Les durées en heures des trajets existant entre ces villes sont données par la matrice M suivante, où $\mathrm{M}(\mathrm{i},\mathrm{j}) = \infty$ pour $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$siginie bien sûr qu'il n'existe pas de liaison entre i et j. :

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	0	6	∞	2	∞	∞	8	∞
B	6	0	4	1	2	∞	2	∞
C	∞	4	0	∞	8	1	3	∞
D	2	1	∞	0	1	∞	∞	∞
E	∞	2	8	1	0	9	∞	∞
F	∞	∞	1	∞	9	0	∞	2
G	8	2	3	∞	∞	∞	0	7
H	∞	∞	∞	∞	∞	2	7	0

1) Dessiner le graphe non orienté correspondant. Une représentation planaire, c'est-à-dire sans intersection d'arêtes, est possible.

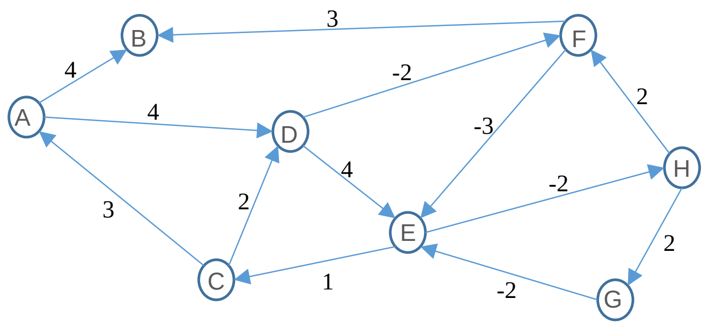
2) Une entreprise de livraison située dans la ville A souhaitant satisfaire au mieux ses clients désire déterminer les meilleurs itinéraires c'est-à-dire les chemins de livraison les plus rapides de la ville A aux autres villes. Déterminer ces itinéraires en utilisant l'algorithme de Dijkstra, puis représenter le graphe partiel de ces itinéraires.

3) La compagnie aérienne gérant le réseau veut déterminer les meilleurs itinéraires entre toutes les villes. Calculer ces itinéraires.

4) On fait l'hypothèse que le coût de gestion d'une liaison est proportionnel à sa longueur (donc à la durée du trajet). Déterminer un sous-réseau (arbre couvrant) permettant de relier toute ville à toute autre ville (via éventuellement des villes intermédiaires) et qui soit le plus économique possible.

Exercice 3

Utiliser un algorithme approprié pour retrouver les plus courts chemins entre le sommet A et les autres sommets du graphe opposé :

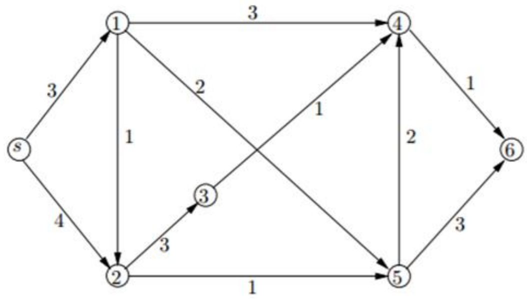


Exercice 4

Imaginer la méthode utilisée par Google Map pour retrouver le plus court chemin entre deux villes A et B données.

Exercice 5

Retrouver les plus courts chemins du graphe suivant à partir du sommet s en utilisant l'algorithme de Dijkstra.



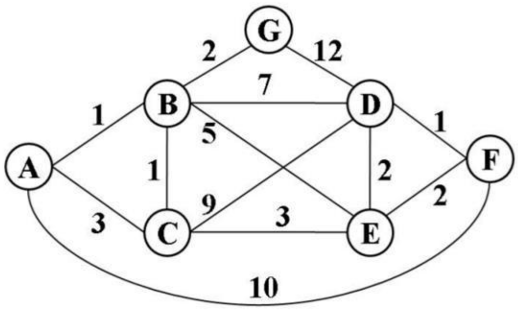
Exercice 6

Soit $G = (X, U, W)$ un graphe orienté et valué, la valeur de l'arc $u \in U$ est w_u telle que $0 \leq w_u \leq 1$. Interpréter la valeur w_u comme étant la probabilité que l'arc u ne soit pas défaillant. Pour un chemin élémentaire entre les sommets s et t, la *fiabilité* de ce chemin est définie comme étant le produit des probabilités w_u des arcs de ce chemin, autrement dit ce produit des w_u est la probabilité que ce chemin ne soit pas défaillant.

Question : Montrer comment un algorithme de plus courts chemins peut aider à retrouver un chemin entre s et t de fiabilité maximale.

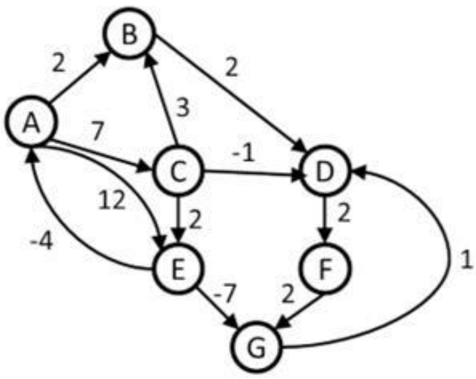
Exercice 7

Utiliser l'algorithme de Bellman pour retrouver les plus courts chemins entre le sommet A et les autres sommets du graphe ci-dessous :



Exercice 8

Appliquer l'algorithme de Dantzig afin de retrouver les plus courts chemins entre tous les couples de sommets de ce graphe :



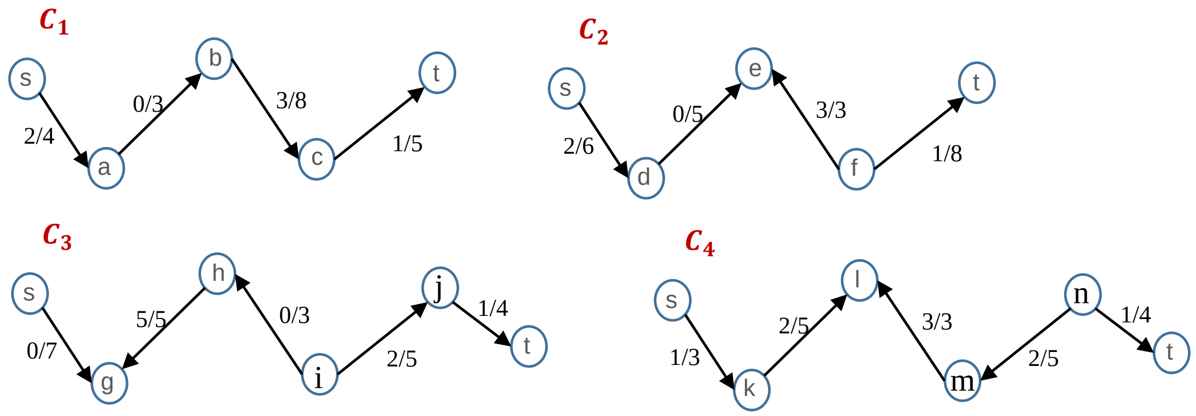
Exercice 9

On sait que l'algorithme de Dijkstra ne marche pas dans le cas des poids négatifs. On peut transformer le graphe en ajoutant une valeur $-v$, telle que v est le minimum des poids négatifs, afin d'avoir des valeurs positives partout dans le graphe. Montrer sur un exemple que cette façon de faire n'est pas efficace.

Théorie des Graphes - TD n°4

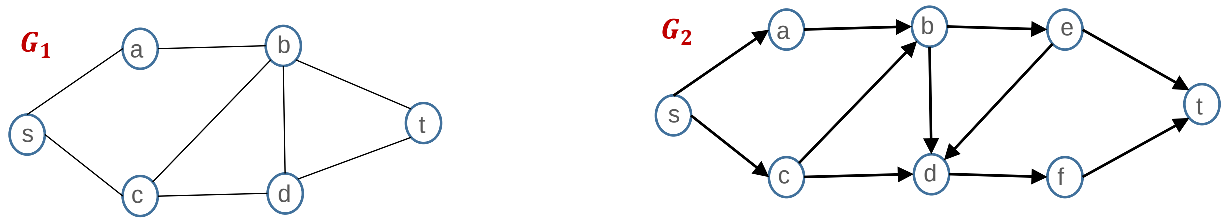
Exercice 1

Améliorer le flot dans les chaines suivantes dans la mesure du possible (voir corrigé):



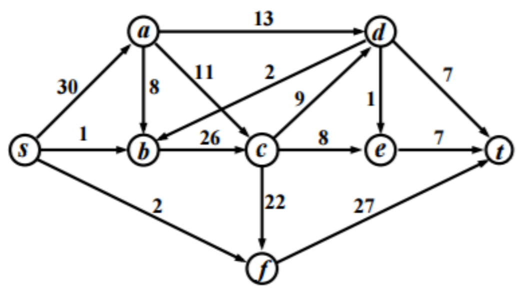
Exercice 2

En utilisant la stratégie DFS, retrouver toutes les chaines qui relient les sommets s à t dans les graphes suivants (voir corrigé):



Exercice 3

1. Maximiser le flot dans le réseau suivant
2. Trouver une coupe minimale (voir corrigé)



Exercice 4

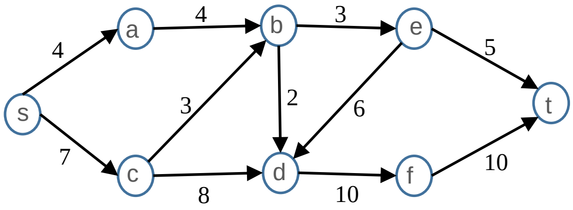
Une machine T est connectée à un serveur S par un réseau ayant les nœuds A, B, C et D. Les capacités de connexion entre les nœuds sont données dans le tableau opposé (en Mbit/s).
L'utilisateur de la machine T télécharge un très gros fichier du serveur S.

	A	B	C	D	T
S	2	6	1		
A		3		7	
B				3	5
C		2		6	
D	3				4

1. Modéliser ce réseau par un graphe.
2. En utilisant l'algorithme de Ford-Fulkerson (flot maximum) trouver le routage qui maximise le débit dans ce réseau. (voir corrigé)

Exercice 5

Une société hydro-électrique dispose d'un ensemble de canalisations interconnectées de divers diamètres et désire acheminer une quantité d'eau maximale d'un point A à un point B.



Quelle quantité d'eau peut effectivement être acheminée et comment l'eau est-elle distribuée le long du réseau de canalisations ? (voir corrigé)

Exercice 6

Démontrer le théorème de Ford-Fulkerson suivant : (voir corrigé)
Soit $G = (X, U, W)$ un graphe valué. Pour tout flot réalisable de valeur f et toute coupe $(Y, \bar{Y})$, on a

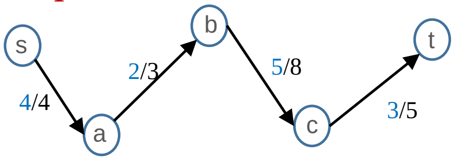
$$f \leq \sum_{x \in Y, y \in \bar{Y}} w(x, y)$$

Exercice 7

Démontrer le théorème suivant : Soit $G = (X, U, W)$ un graphe orienté et valué. Un flot f est maximal si et seulement s'il n'existe pas de chaine améliorante. (voir corrigé)

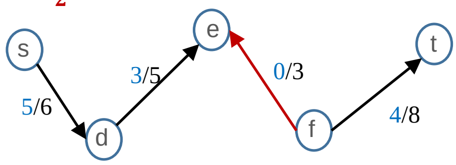
Corrigé Exercice 1

C_1



$\varepsilon = \varepsilon_1 = min\{4-2; 3-0; 8-3; 5-1\} = \mathbf{2}$

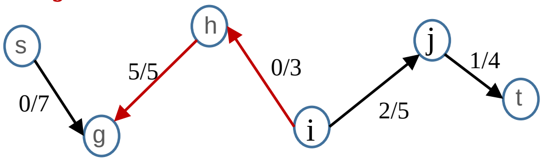
C_2



$\varepsilon_1 = min\{6-2; 5-0; 8-1\} = 4$

$\varepsilon_2 = min\{3\} = 3 \quad \Rightarrow \varepsilon = min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} = \mathbf{3}$

C_3

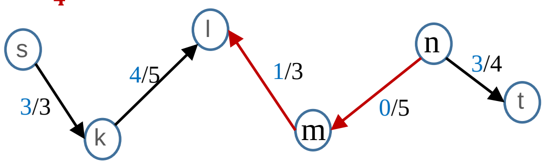


$\varepsilon_1 = min\{7-0; 5-2; 4-1\} = 3$

$\varepsilon_2 = min\{5; 0\} = 0 \quad \Rightarrow \varepsilon = min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} = \mathbf{0}$

⇒ pas d'amélioration

C_4

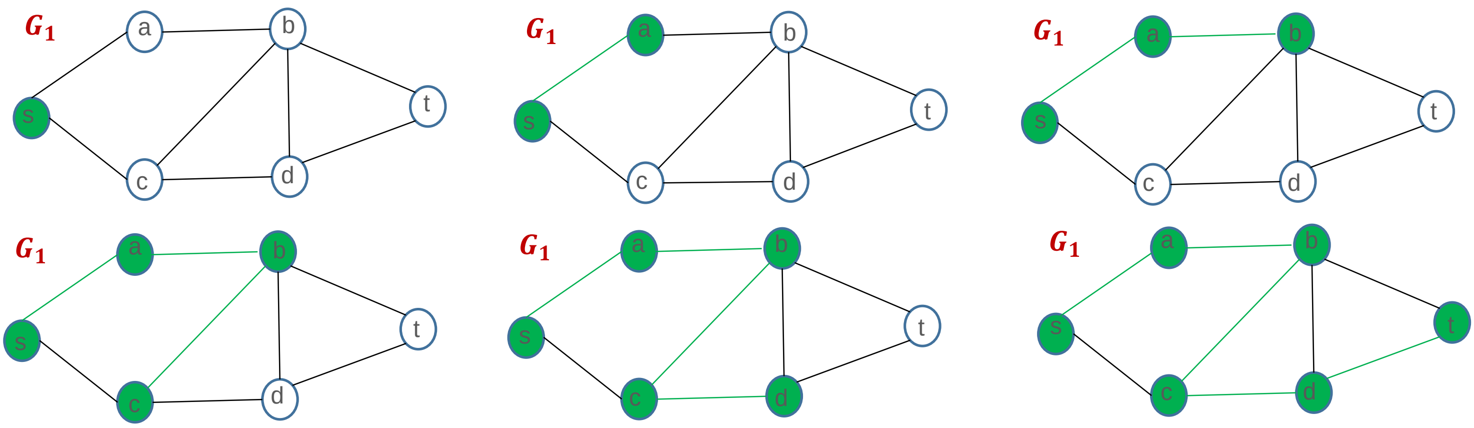


$\varepsilon_1 = min\{3-1; 5-2; 4-1\} = 3$

$\varepsilon_2 = min\{3; 2\} = 2 \quad \Rightarrow \varepsilon = min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} = \mathbf{2}$

Corrigé Exercice 2

❖ La première chaine C_1 du graphe G_1 se construit comme suit :

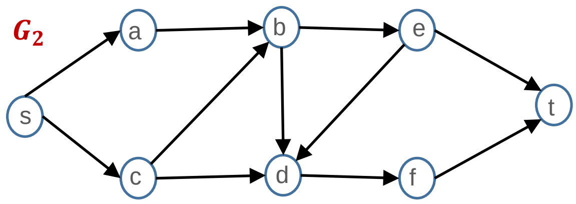


on obtient $C_1 = \{s, a, b, c, d, t\}$.

Les autres chaines sont : $C_2 = \{s, a, b, d, t\}$; $C_3 = \{s, a, b, t\}$; $C_4 = \{s, c, b, d, t\}$;

$C_5 = \{s, c, b, t\}$; $C_6 = \{s, c, d, t\}$

❖ Les chaines du graphe G2 sont :



$C_1 = \{s, a, b, c, d, e, t\}$;

$C_2 = \{s, a, b, c, d, f, t\}$;

$C_3 = \{s, a, b, d, e, t\}$;

$C_4 = \{s, a, b, d, f, t\}$;

$C_5 = \{s, a, b, e, d, f, t\}$;

$C_6 = \{s, a, b, e, t\}$;

$C_7 = \{s, c, b, d, e, t\}$;

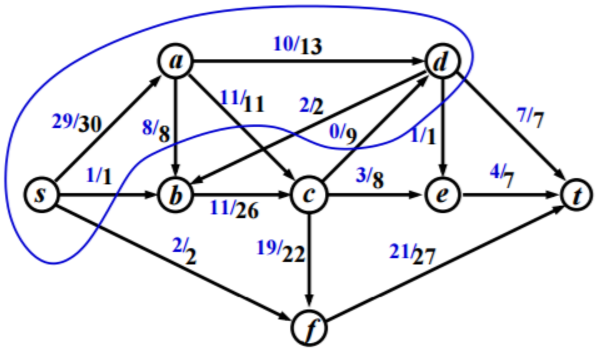
$C_8 = \{s, c, b, d, f, t\}$;

$C_9 = \{s, c, b, e, t\}$;

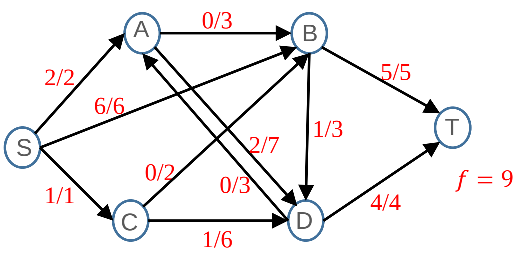
$C_{10} = \{s, c, d, b, e, t\}$;

$C_{11} = \{s, c, d, f, t\}$.

Corrigé Exercice 3



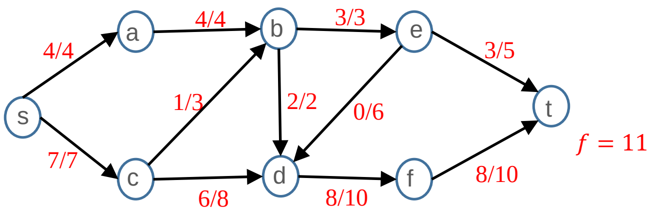
Corrigé Exercice 4



Corrigé Exercice 5

Le flot maximum dans ce réseau est $f = 11$.

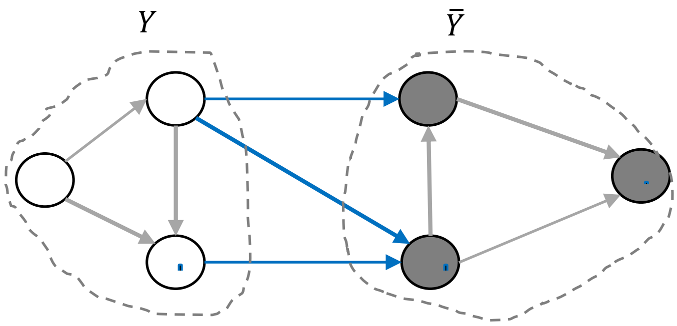
On note aussi que la coupe $Y = \{s\}$, $\bar{Y} = \{a, b, c, d, e, f, t\}$ est de capacité $4 + 7 = 11$.
C'est donc une coupe minimale.



Corrigé Exercice 6

Démonstration du théorème de Ford-Fulkerson : La capacité de la coupe $(Y, \bar{Y})$ est

$$w(Y, \bar{Y}) = \sum_{x\epsilon Y, y\epsilon \bar{Y}} w(x, y)$$



On sait que $0 \leq f(u) \leq w(u)$, $\forall\, u \,\epsilon\, U$, donc

$$f = \sum_{x\epsilon Y, y\epsilon \bar{Y}} f(x, y) - \sum_{y\epsilon \bar{Y}, x\epsilon Y,} f(y, x)$$

$$\leq \sum_{x\epsilon Y, y\epsilon \bar{Y}} w(x, y) = w(Y, \bar{Y})$$

Corrigé Exercice 7

Démontrons ce résultat par l'absurde. Supposons que le flot f est maximal et qu'il existe une chaine améliorante

$$C = (u_i \text{ tel que } u_i \,\epsilon C^+ \text{ ou } u_i \,\epsilon C^-, i = 1 \cdots k)$$

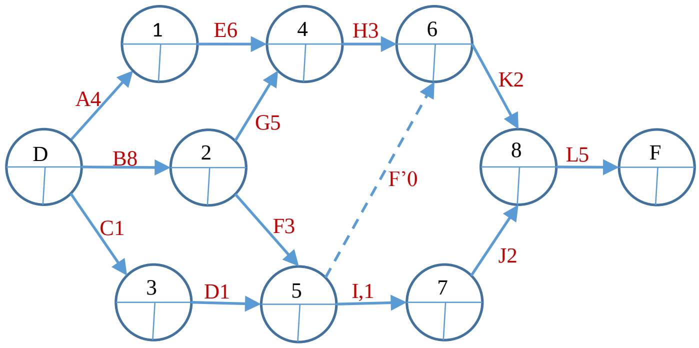
avec C^+ ensemble des arcs directs de la chaine C, et C^-ensemble des arcs inversés de la chaine C.
Posons

$$\varepsilon_1 = \min_{u\epsilon C^+}(w(u) - f(u)), \qquad \varepsilon_1 = \min_{u\epsilon C^-} f(u)\,, \qquad \varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

Dans ce cas, ε représente l'amélioration qu'on peut apporter à ce flot, donc f n'est pas maximal.

Théorie des Graphes - TD n°5

Exercice 1



Considérons le graphe PERT suivant :

1. Construire le tableau des antécédents (prédécesseurs) et successeurs de chaque tâche.
2. Calculer les dates au plutôt et au plus tard.
3. Tracer le chemin critique.
4. Calculer les marges de chacune des taches.

   (voir corrigé)

Exercice 2

Tracer le diagramme de Gantt correspondant au projet suivant (voir corrigé)

Tâches	Débuts	Durées	Fins
A	01/06/2014	5	06/06/2014
B	06/06/2014	4	10/06/2014
C	03/06/2014	10	13/06/2014
D	05/06/2014	6	11/06/2014
E	09/06/2014	5	14/06/2014

Exercice 3

Le projet d'installation d'une station hydraulique passe par les étapes suivantes :

Tâches	Descriptions	Durées	Antécédents
A	Etudes et calculs des besoins en composants et matières	1	-
B	Délai de livraison de l'ensemble de tuyauterie	5	C
C	Appel d'offre pour l'ensemble des composants	10	A
D	Délai de livraison des pompes	5	C
E	Délai de livraison de l'ensemble électrique	3	C
F	Installation et montage de la partie hydraulique (tuyauterie + pompes)	4	B, D
G	Branchements et raccordements électriques des pompes et ses tuyauteries	2	E, F
H	Mise en route de l'ensemble	1	G

1. Tracer le réseau PERT en faisant apparaitre le chemin critique, les temps au plus tôt, les temps au plus tard.
2. Sachant que le début des travaux est fixé au 1^{ier} octobre, tracer le planning GANTT correspondant.

   (voir corrigé)

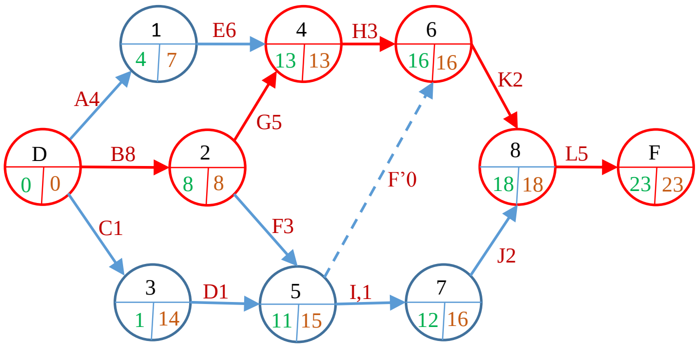
Exercice 4

Mêmes questions que l'exercice 3 appliqué au projet ci-dessous (voir corrigé) :

Tâches	Descriptions	Durées	Antécédents
A	Étude, réalisation et acceptation des plans	4	-
B	Préparation du terrain	9	A
C	Commande des matériaux	2	A
D	Creusement des fondations	5	B
E	Commande portes et fenêtres	2	A
F	Livraison des matériaux	5	C
G	Construction des fondations	12	D, F
H	Livraison des portes et fenêtres	7	E
I	Construction des murs	8	G
J	Mise en place des portes et fenêtres	5	H, I

Corrigé Exercice 1

Tâches	Antécédents	Durées	Successeurs
A	-	4	E
B	-	8	F, G
C	-	1	D
D	C	1	I
E	A	6	H
F	B	3	I, k
G	B	5	H
H	F, G	3	K
I	D, F	1	J
J	I	2	L
K	H, F	2	L
L	J, K	5	-



Chemin critique :

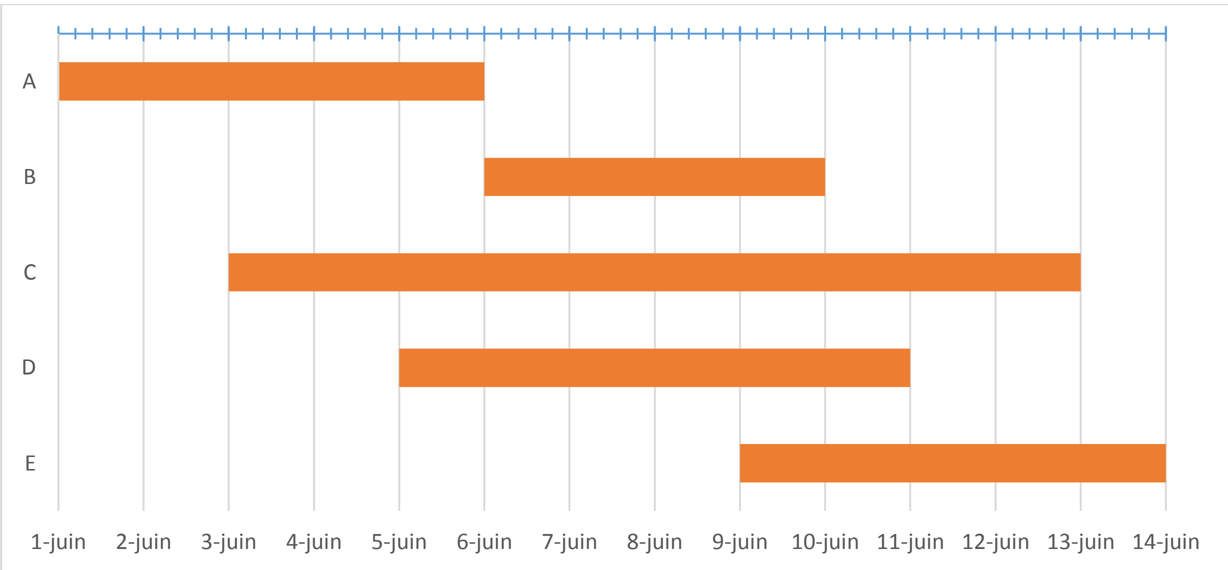
B, G, H, K, L.

Durée optimale du projet : 23 jours

Calcul des marges :

A : 7 – 4 – 0 = 3 jours de marge libre	G : 13 – 5 – 8 = 0 ⇒ tâche critique
B : 8 – 8 – 0 = 0 ⇒ tâche critique	H : 16 – 3 – 13 = 0 ⇒ tâche critique
C : 14 – 1 – 0 = 13 jours de marge libre	I : 16 – 1 – 11 = 4 jours de marge libre
D : 15 – 1 – 1 = 13 jours de marge libre	J : 18 – 2 – 12 = 4 jours de marge libre
E : 13 – 6 – 4 = 3 jours de marge libre	K : 18 – 2 – 16 = 0 ⇒ tâche critique
F : 15 – 3 – 8 = 4 jours de marge libre	L : 23 – 5 – 18 = 0 ⇒ tâche critique

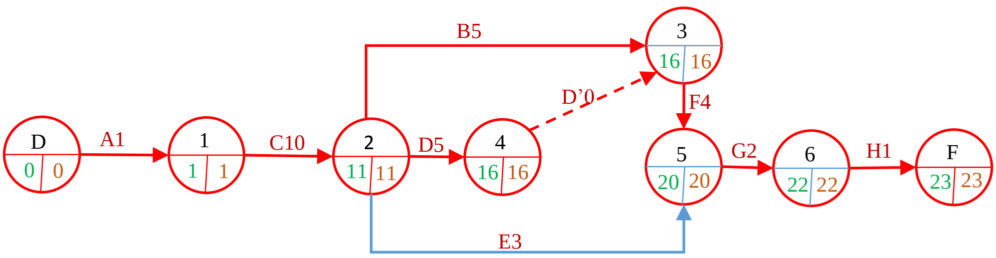
Corrigé Exercice 2



Corrigé Exercice 3

Tâches	Durées	Antécédents	Niveaux	Successeurs
A	1	-	Niveau 1	C
B	5	C^2	Niveau 3	F
C	10	A^1	Niveau 2	B, D, E
D	5	C^2	Niveau 3	F
E	3	C^2	Niveau 3	G
F	4	B^3, D^3	Niveau 4	G
G	2	E^3, F^4	Niveau 5	H
H	1	G^5	Niveau 6	-

Graphe PERT :



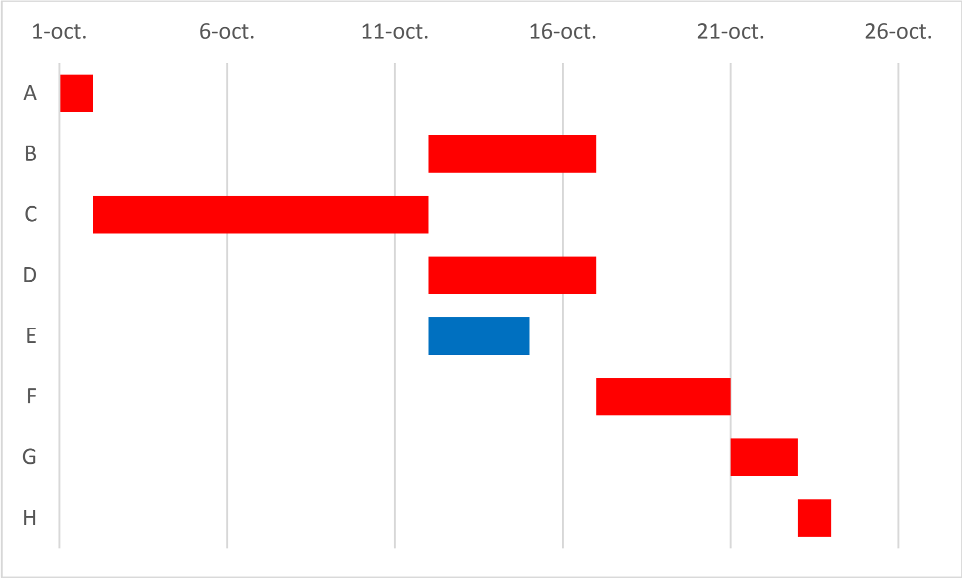
Calcul des marges :

A : 1 – 1 – 0 = 0 ⇒ tâche critique	E : 20 – 3 – 11 = 6 jours de marge libre
B : 16 – 5 – 11 = 0 ⇒ tâche critique	F : 20 – 4 – 16 = 0 ⇒ tâche critique
C : 11 – 10 – 1 = 0 ⇒ tâche critique	G : 22 – 2 – 20 = 0 ⇒ tâche critique
D : 16 – 5 – 11 = 0 ⇒ tâche critique	H : 23 – 1 – 22 = 0 ⇒ tâche critique

Diagramme de Gantt :

En supposant que le projet démarre le 01/10/2014, et en prenant les dates au plus tard t_2 précédant chaque tâche, on construit le tableau suivant qui nous permettra de tracer le diagramme de Gantt

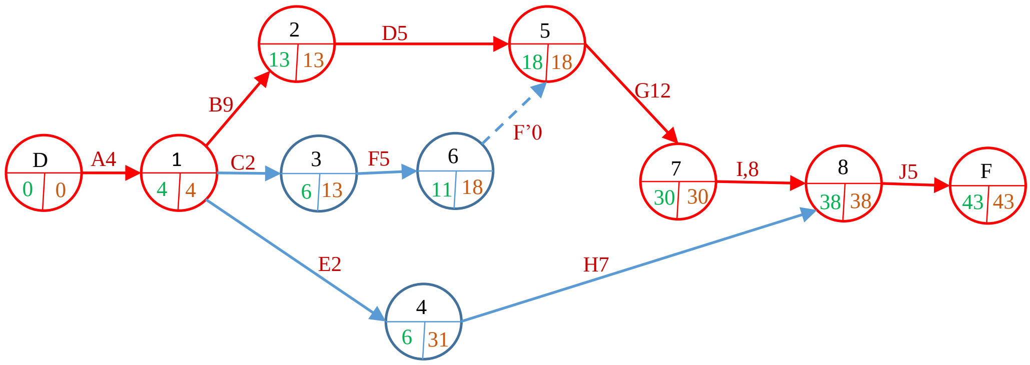
Tâches	t_2	Débuts	Durées
A	0	01/10/2014	1
B	11	12/10/2014	5
C	1	02/10/2014	10
D	11	12/10/2014	5
E	11	12/10/2014	3
F	16	17/10/2014	4
G	20	21/10/2014	2
H	22	23/10/2014	1



Corrigé Exercice 4

Tâches	Durées	Antécédents	Niveaux	Successeurs
A	4	-	Niveau 1	B, C, E
B	9	A^1	Niveau 2	D
C	2	A^1	Niveau 2	F
D	5	B^2	Niveau 3	G
E	2	A^1	Niveau 2	H
F	5	C^2	Niveau 3	G
G	12	D^3, F^3	Niveau 4	I
H	7	E^2	Niveau 3	J
I	8	G^4	Niveau 5	J
J	5	H^3, I^5	Niveau 6	-

Graphe PERT :



Calcul des marges :

A : 4 – 4 – 0 = 0 ⇒ tâche critique	F : 18 – 5 – 6 = 7 jours de marge libre
B : 13 – 9 – 4 = 0 ⇒ tâche critique	G : 30 – 12 – 18 = 0 ⇒ tâche critique
C : 13 – 2 – 4 = 7 jours de marge libre	H : 38 – 7 – 6 = 25 jours de marge libre
D : 18 – 5 – 13 = 0 ⇒ tâche critique	I : 38 – 8 – 30 = 0 ⇒ tâche critique
E : 31 – 2 – 4 = 25 jours de marge libre	J : 43 – 5 – 38 = 0 ⇒ tâche critique

Diagramme de Gantt :

En supposant que le projet démarre le 01/10/2014, et en prenant les dates au plus tard t_2 précédant chaque tâche, on construit le tableau suivant qui nous permettra de tracer le diagramme de Gantt

Tâches	t_2	Débuts	Durées
A	0	01/10/2014	4
B	4	05/10/2014	9
C	4	05/10/2014	2
D	13	14/10/2014	5
E	4	05/10/2014	2
F	13	14/10/2014	5
G	18	19/10/2014	12
H	31	01/11/2014	7
I	30	31/10/2014	8
J	38	08/11/2014	5