

TD n° 1

Grammaires

Exercice 1.1 Soit la grammaire formelle $G = (\{a, b\}, \{S, T\}, P, S)$ dont les règles de P sont :

- (1) $S \rightarrow aS$
- (2) $S \rightarrow bR$
- (3) $S \rightarrow b$
- (4) $R \rightarrow aR$
- (5) $R \rightarrow bS$

1. Montrer que le mot $abbb$ est généré par G .
2. Montrer que le mot abb n'est pas généré par G .
3. Montrer qu'un mot se terminant par a ne peut pas être généré par G .
4. Montrer que les mots générés par G ont tous un nombre impair de b .

Exercice 1.2 Soit la grammaire formelle $G = (\{a, b\}, \{S, T\}, P, S)$ dont les règles de P sont :

- (1) $S \rightarrow \varepsilon$
- (2) $S \rightarrow a$
- (3) $S \rightarrow b$
- (4) $T \rightarrow aSa$
- (5) $T \rightarrow bSb$

1. Montrer que le mot $abbabba$ est généré par G . Montrer que le mot $baba$ n'est pas généré par G .
2. Montrer que G engendre l'ensemble L de tous les mots palindromes définis sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. (Un palindrome est un mot identique à lui-même quand on lit ses symboles dans l'ordre inverse.)

Exercice 1.3 Le but final de l'exercice est de trouver la grammaire du langage $L = \Sigma^* \setminus \{ab\}$ (tous les mots possibles sauf ab) défini sur $\Sigma = \{a, b\}$.

1. Donner l'ensemble des mots de L qui sont de longueur inférieure ou égale à 2.
2. Déterminer une grammaire du langage Σ^* .
3. En vous aidant de la question 2. ci-dessus, en déduire une grammaire du langage $\{w \in \Sigma^* \mid |w| > 2\}$.
4. En vous aidant des questions 1. et 3., déterminer une grammaire du langage L .

Exercice 1.4 Grammaires hors-contexte

Pour chacun des langages de l'exercice précédent, donner une grammaire qui génère le même langage

Exercice 1.5 Grammaires ambiguës

Ecrire une grammaire hors-contexte qui génère le langage

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ ou } i = k\}$$

Votre grammaire est elle ambiguë ? pourquoi ?

Exercice 1.6 Pour chacun des automates d'états finis suivants, déterminer une grammaire engendrant le même langage qu'il reconnaît :

		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
→	0	1	0	
	1	1	3	2
←	2	0		
	3	2	4	3
←	4	2	4	1

		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
→	0	{1}	∅	∅
	1	{2,3}	2	∅
	2	∅	{1,3}	∅
←	3	∅	∅	0

Exercice 1.7 Donner les automates associés aux trois grammaires suivantes :

- $S \rightarrow aA \mid bS \mid \varepsilon, A \rightarrow aB \mid bA, B \rightarrow aS \mid bB.$
- $S \rightarrow aA \mid bcB, A \rightarrow acA \mid B, B \rightarrow bB \mid b.$
- $S \rightarrow Sb \mid A \mid abc, A \rightarrow Aab \mid \varepsilon.$

Exercice 1.8 Pour les langages sur $X = \{a, b, c\}$ définis ci-dessous, définir une grammaire les engendrant. Vous donnerez le type des différentes grammaires définies.

- $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}.$
- $L_2 = \{a^n b^p c^q \mid n, p, q \geq 1\}.$
- $L_3 = \{a^n b^p \mid n \geq p \geq 0\}.$
- $L_4 = \{a^n b^m \mid n \neq m, n, m \geq 0\}.$
- $L_5 = \{a^n b^p c^n d^q \mid n, p, q > 0\} \cup \{a^p b^n c^q d^n \mid n, p, q > 0\}.$
- $L_6 = \{a^n b^p c^q \mid n, q \geq 0, p \geq n + q\}.$
- $L_7 = \{a^n b^p \mid n, p \geq 0, n \neq p + 3\}.$
- $L_8 = \{a^n b^n c^p \mid n, p \geq 1\}.$
- $L_9 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}.$

Exercice 1.9 Donnez les automates et les grammaires associés aux expressions régulières suivantes : (1) $ab^* + b$; (2) $a^*(b(a+b))^*$; (3) $((ab+ba)^*bb)^*aa^*$.

Exercice 1.10 (Vrai ou faux ?).

- i) Tout langage régulier est hors-contexte.